

Introdução à Teoria da Relatividade Restrita

ANO LECTIVO: 2016/2017

Prof. Carlos R. Paiva
DEEC – INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO | ÁREA CIENTÍFICA DE TELECOMUNICAÇÕES

1. Introdução

No final do século XIX surge, no universo científico, uma contradição insanável entre, de um lado, a mecânica newtoniana e, do outro lado, a teoria electromagnética fundada nas equações de Maxwell. Para superar essa contradição entre a mecânica e o electromagnetismo inventou-se um expediente sem correspondência experimental: admitia-se a existência de um meio (hipotético, portanto) em relação ao qual todos os sinais electromagnéticos (incluindo, naturalmente, a luz) se deveriam propagar – o *éter luminífero*.

Por essa altura o pensamento científico da física teórica fundamental encontrava-se centrado em duas disciplinas: (i) a mecânica, de Sir Isaac Newton (1642—1726); (ii) a electrodinâmica, de James Clerk Maxwell (1831—1879). As equações diferenciais da teoria electromagnética aparecem completamente desenvolvidas, pela primeira vez, nos dois tratados fundadores de Maxwell – *Treatise on Electricity and Magnetism – Vols. I & II* – publicados no ano de 1873 (1ª edição).

Em termos históricos, porém, a noção de física *fundamental* é um conceito que apenas adquire sentido a partir das teorias (posteriores) de grande unificação das (quatro) *interacções fundamentais* da física (a saber: gravitacional, electromagnética, nuclear forte e nuclear fraca).

Com as equações de Maxwell inicia-se um percurso novo: a explicação de efeitos físicos, até então considerados de natureza essencialmente diferente, era feita – pela primeira vez – no âmbito de uma *teoria unificada*. De facto, a electrodinâmica clássica de Maxwell unifica três realidades aparentemente diversas num único corpo teórico (a saber: electricidade, magnetismo e óptica). Este edifício matemático fértil descreve, de facto, uma única realidade subjacente: o campo electromagnético, que relaciona dinamicamente o campo eléctrico com o campo magnético. Mas Maxwell vai, contudo, ainda mais além: ele afirma, mesmo sem confirmação experimental directa, que a óptica é – nada mais nada menos – que uma pura manifestação do campo electromagnético. Por outras palavras: a luz é, apenas, uma onda electromagnética. Para frequências sub- ou supra-ópticas, deverão (também) existir ondas electromagnéticas – embora o olho humano não tenha sensibilidade para a sua detecção.

Até ao aparecimento, em 1905, da teoria da relatividade de Albert Einstein (1879 –1955), pensava-se que qualquer onda (de matéria, de som, mas também electromagnética) se deveria propagar, sempre, num meio apropriado. Por exemplo: no caso do som, qualquer meio material poderia suportar

a respectiva propagação. No ar, com efeito, o som propaga-se atendendo às condições locais do vento (ou da sua ausência). As explosões das estrelas não são audíveis no nosso planeta: além das enormes distâncias, que provocam uma atenuação considerável, existe (sobretudo) um vácuo interstelar que impede a propagação das ondas/vibrações acústicas.

Porém, em relação à luz (e, conseqüentemente, em relação a todos os sinais electromagnéticos), colocava-se uma questão básica: qual seria o meio (designado *éter luminífero* ou, simplesmente, *éter*) capaz de «suportar» a propagação destas ondas? Tal como no caso do ar (em relação ao som), o «vento de éter» deveria dar origem a uma *anisotropia* dos sinais electromagnéticos, consoante a direcção e sentido de propagação. Haveria, portanto, que (tentar) observar a influência desse «vento de éter» sobre a velocidade de propagação da luz. Por exemplo: o movimento orbital da Terra, em torno do Sol, deveria provocar um arrastamento do éter luminífero – um «vento de éter», que provocaria uma variação mensurável na velocidade de transmissão da luz ou, já agora, de qualquer sinal electromagnético.

Todavia, todas as experiências feitas para detectar a transformação de Galileu em relação à velocidade de propagação das ondas electromagnéticas deram, e continuam a dar (com um nível de precisão sempre crescente, dada a evolução tecnológica) um resultado rigorosamente negativo: não se consegue medir qualquer vestígio – mínimo que seja – de um «vento de éter». Ou seja: não existe a mínima evidência experimental para a existência do «éter».

Conclusão: a velocidade da luz (no vácuo) corresponde ao limite cósmico, finito, da propagação de qualquer perturbação no universo observável.

Note-se que a transformação de Galileu, aplicada à propagação electromagnética, implica (necessariamente) que as ondas electromagnéticas podem ter uma velocidade ilimitada: a luz poderia, em princípio, propagar-se com uma *velocidade infinita*. Porém, *não* é isso que se observa. O que se observa, isso sim, é que a velocidade da luz (no vácuo) é imutável – no sentido em que é independente de qualquer observador hipotético. Nomeadamente, a velocidade da luz é finita e não depende da velocidade da respectiva fonte emissora (ao contrário, por exemplo, de uma bala emitida por uma espingarda).

Infere-se, portanto, que a velocidade da radiação electromagnética, no vácuo, tem de coincidir (independentemente do seu comprimento de onda) com o limite cósmico, finito, das velocidades no

nosso universo. Por outras palavras: a incompatibilidade entre – por um lado – a (esperada) transformação aditiva (simples) de Galileu e – por outro lado – a existência de um limite cósmico finito para as velocidades no nosso universo observável, implica uma (e apenas uma) entre duas alternativas (mutuamente incompatíveis, portanto):

- Ou a transformação de Galileu está correcta (e, com ela, toda a mecânica newtoniana) – mas então o electromagnetismo necessita de uma teoria diferente da construída através das equações de Maxwell;
- Ou a teoria electromagnética, sem a existência do «éter», constitui um edifício congruente (e, conseqüentemente, há que aceitar, sem restrições, as equações de Maxwell) – mas então toda a mecânica newtoniana está fundamentalmente errada.

Assim, conclui-se: como a hipótese do «éter» é incompatível com a realidade experimental, há que desistir de considerar válida a transformação de Galileu. Infere-se, daqui, que a combinação de velocidades não pode ser aditiva – ou melhor, a composição de velocidades não é uma mera soma/diferença. A mecânica newtoniana está, portanto, fundamentalmente errada e as equações de Maxwell constituem, de forma insofismável, um edifício coerente com todas as observações experimentais. O princípio da relatividade da mecânica de Galileu tem de ser corrigido, de forma a incluir o que nos diz o electromagnetismo (sem a hipótese supérflua do «éter»):

A velocidade da luz, no vácuo, tem de coincidir com o limite cósmico, finito, das velocidades. Qualquer velocidade que permaneça invariante nos diferentes sistemas de referência tem, necessariamente, de coincidir com esse limite cósmico.

Esta é a única saída teórica possível para a observação experimental da invariância da velocidade da luz (nomeadamente, em relação à respectiva fonte emissora). Do ponto de vista da história da ciência, porém, ninguém entendeu a verdadeira antinomia existente entre a transformação de Galileu e a inexistência do éter luminífero – até 1905, quando Einstein resolveu finalmente esta contradição.

*Estes apontamentos incidem sobre a solução encontrada por Einstein: a **teoria da relatividade restrita**. Porém, esta é uma solução revolucionária, que provoca uma revisão profunda dos conceitos tradicionais (dir-se-ia, até, atávicos) de **espaço e tempo**. Trata-se de uma mudança de paradigma.*

A teoria da relatividade restrita tem uma origem precisa, que remonta ao artigo de 1905, escrito por Albert Einstein, para a revista *Annalen der Physik (Berlin)*: **“Zur Elektrodynamik bewegter Körper”** [Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento] (Volume 322, Issue 10, pp. 891—921).

Figura 1

Fotografia de Einstein de 1935 (Princeton).

Albert Einstein (14 de Março de 1879 – 18 de Abril de 1955).

Nasceu em Ulm, Württemberg, Império Germânico. Faleceu (com 76 anos) em Princeton, New Jersey, USA. Cidadão americano desde 1940.

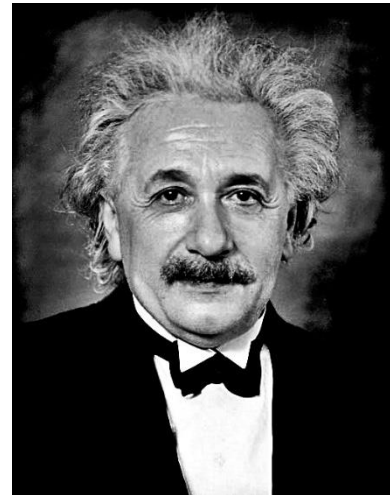
Doutorou-se em 1905 pela Universidade de Zurique. Professor da Universidade de Berna, da Universidade Charles-Ferdinand de Praga, da Universidade Humboldt de Berlim e do ETH de Zurique.

Director do Instituto de Física Kaiser Wilhelm (1914—1932). Presidente da Sociedade de Física Alemã (1916—1918). Membro da Academia Prussiana das Ciências.

Prémio Nobel da Física de 1921.

Investigador do *Institute for Advanced Study (IAS)*, de Princeton, entre 1933 e 1955 (i.e., até à sua morte).

Alguns historiadores da ciência notam que a relatividade restrita deve a sua origem a vários autores (nomeadamente: Woldemar Voigt, Hendrik Antoon Lorentz, Jules Henri Poincaré, Albert Einstein, Herman Minkowski). Pelo contrário, não obstante algum trabalho lateral de David Hilbert (que sempre atribuiu a origem da sua contribuição às ideias originais de Einstein), podemos dizer que a teoria da relatividade geral nasce de um único autor – Albert Einstein (contando, também, com uma pequena e pontual colaboração matemática de Marcel Grossmann, com o qual escreveu um artigo, em colaboração, em 1913). Mas, a bem da verdade, é necessário estabelecer, clara e definitivamente, o seguinte.



A relatividade restrita modificou radicalmente os nossos conceitos de espaço e tempo e, nessa medida, mais do que um conjunto de equações (habitualmente conhecidas pela designação de transformação de Lorentz), trata-se de uma teoria física que se baseia numa revisão revolucionária do conceito de simultaneidade. E, para essa revisão, foi imprescindível a contribuição de Einstein.

Podemos ainda acrescentar que existiu, também, uma outra influência decisiva: a interpretação geométrica da autoria de Herman Minkowski (1907) que, não obstante, apenas foi desenvolvida devido ao trabalho prévio, fundador, de Einstein de 1905 (é interessante notar que Minkowski foi professor de Einstein). Ou seja: deve-se a Einstein o trabalho inaugural da clarificação da relação entre, por um lado, a natureza do contínuo espaço-tempo e, por outro lado, a transformação de Lorentz.

É costume fazer depender a construção do edifício teórico da relatividade restrita, seguindo o próprio Einstein, de dois postulados. Com isso pretende-se sublinhar a radicalidade da teoria – tornando-a autónoma da electrodinâmica clássica, fundada nas equações de Maxwell. É claro que as equações de Maxwell tiveram um papel fundamental na motivação da relatividade restrita – o próprio Einstein o reconheceu. Porém, a relatividade restrita transcende a electrodinâmica clássica. Na realidade, a teoria quântica do campo – baseada na relatividade restrita e na mecânica quântica – é, actualmente, a argamassa fundamental para o chamado modelo *standard* do universo. O arquétipo de uma teoria quântica do campo é a electrodinâmica quântica ou QED (*quantum electrodynamics*) – que devemos, na sua forma covariante, aos físicos Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger, Richard Feynman e Freeman Dyson. O prémio Nobel da Física de 1965 foi atribuído a três (de entre este quatro) fundadores da QED (a saber: Tomonaga, Schwinger e Feynman), tendo ficado de fora (segundo muitos analistas, injustamente) Freeman Dyson (o prémio Nobel é atribuído, no máximo, a três personalidades).

No modelo *standard* do universo, são unificadas três das quatro interacções fundamentais da física:

- A interacção electromagnética;
- A interacção nuclear fraca;
- A interacção nuclear forte.

Em particular, a teoria electro-fraca, de Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg (que, devido a esse facto, receberam o prémio Nobel da Física de 1979), procede à unificação da interacção electromagnética com a interacção nuclear fraca. Com a cromodinâmica quântica temos, por outro lado, uma teoria quântica da interacção nuclear forte – fundada por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross (que, por essa razão, receberam o prémio Nobel da Física de 2004).

Mas, por enquanto, a quarta interacção fundamental da física – a *interacção gravitacional*, explicada pela teoria da relatividade geral de Einstein – escapa a todos os esforços de unificação com a mecânica quântica. Não obstante, existem várias teorias físico-matemáticas candidatas a uma tal unificação (nomeadamente, a teoria das super-cordas). Contudo, não existe nem consenso científico nem

verificação experimental para uma ToE (*theory of everything*) – se é que uma tal teoria é possível. O caminho passa, eventualmente, por uma teoria quântica da gravitação.

Voltemos, porém, ao que nos interessa aqui: a teoria da relatividade restrita. E, seguindo o próprio Einstein, vamos começar por declarar os dois postulados fundamentais desta teoria.

P1 – Primeiro postulado (princípio da relatividade): *as leis da física são as mesmas em todos os referenciais de inércia.*

P2 – Segundo postulado (invariância de c): *a velocidade da luz, no vácuo, tem o mesmo valor c em todos os referenciais de inércia.*

Precisamos, portanto, de clarificar o que se entende por *referencial de inércia*. Trata-se de um referencial (um sistema de referência matematicamente equivalente a um sistema de coordenadas) em que a estrutura não só do espaço, mas também do tempo, é homogênea e isotrópica. Existe, então, a classe de equivalência dos referenciais de inércia. Aqui, a relação de equivalência é o movimento relativo entre referenciais (fixado, pelo menos, um referencial de inércia): entre dois referenciais de inércia, distintos, existe sempre um movimento relativo uniforme e retilíneo. De acordo com a força de Newton,

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} .$$

Assim, a inexistência de aceleração ($\mathbf{a} = 0$) impõe uma força *nula* resultante ($\mathbf{F} = 0$) sobre uma partícula material de massa (inercial) m . O movimento dessa partícula será, portanto, descrito pela equação newtoniana

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t .$$

Tem-se, como é sabido,

$$\mathbf{a} = \frac{d \mathbf{v}}{d t} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} ,$$

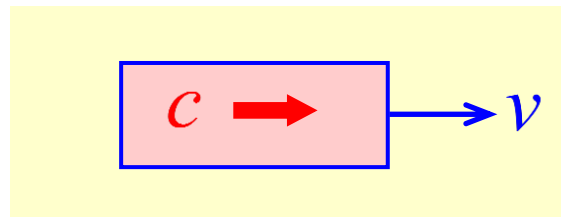
onde \mathbf{v} é o vector da velocidade e \mathbf{r} o vector-posição. No sistema de coordenadas $S \mapsto (x, y, z)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ é a equação paramétrica de uma recta.

A existência de gravitação implica a existência de aceleração de uma partícula material e, portanto, a impossibilidade de um sistema inercial global. Ou seja: a gravitação não pode ser descrita pela relatividade restrita. Isso não significa, porém, que o movimento acelerado não possa ser estudado em relatividade restrita. Significa, apenas, que o referencial próprio de uma partícula material acelerada não é um referencial de inércia. Podemos, no entanto, considerar uma sucessão infinita e contínua de referenciais de inércia que, em cada instante, coincidem (localmente) com o referencial próprio (não inercial) solidário com a partícula (e que, portanto, se movimenta com ela).

A gravitação, ao impregnar todo o espaço com a interacção gravitacional, impossibilita a existência de um referencial de inércia *global*: apenas podemos construir, artificialmente, um referencial que *localmente*, e de *forma aproximada*, simule um referencial de inércia.

A primeira reflexão necessária que um neófito da relatividade restrita tem de fazer é a seguinte: são os dois postulados da relatividade restrita, anteriormente apresentados, compatíveis? Com efeito, é absolutamente necessário começar por entender que, de acordo com a física pré-relativista, existe uma *incompatibilidade fundamental* entre os dois postulados. É por aqui que se deve começar.

Mesmo não sendo explicitamente declarado na respectiva formulação teórica, a mecânica newtoniana aponta para um princípio fundamental – a saber: não existe um limite superior para a velocidade de uma partícula. Se um comboio se afasta de nós (que, por hipótese, nos encontramos estacionários na estação) com velocidade v e se, no interior do comboio, é emitido um sinal electromagnético (na direcção e sentido do seu movimento) com velocidade c , então a mecânica newtoniana determina (e nós até achamos esse resultado intuitivo) que a velocidade do sinal electromagnético – em relação a nós (na estação) – deverá ser $u = v + c > c$.

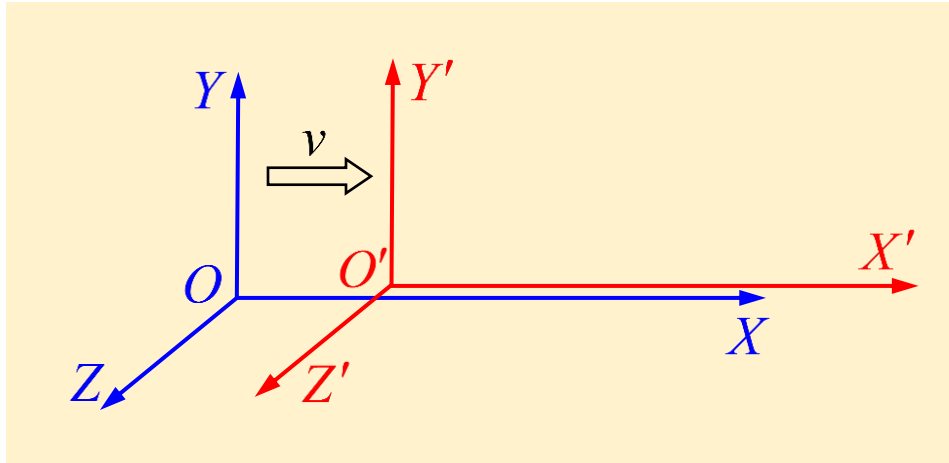


Está claro que, quando o sinal electromagnético é emitido em sentido contrário ao do movimento do comboio, se deverá ter $u = v - c < 0$ em que $|u| = c - v$ (já que, como é natural, se admite que $v < c$).

Mas, não: isso está em *total contradição* com o segundo postulado, segundo o qual $u = c$, i.e., a adição de velocidades *não* se aplica. Por outras palavras: a transformação de Galileu – donde resulta a adição de velocidades – está em contradição com o segundo postulado.

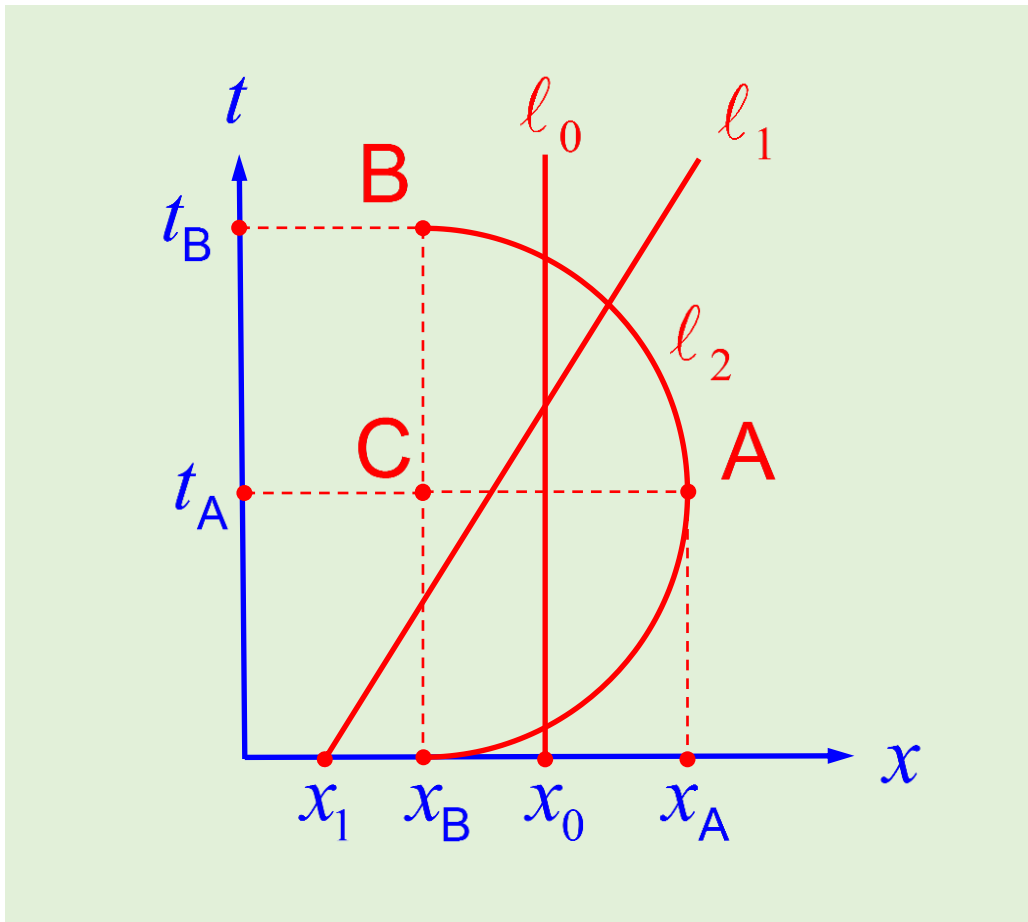
Antes de prosseguir o nosso estudo, porém, vamos fazer uma incursão geométrica na transformação de Galileu. Essa incursão destina-se a introduzir o novo conceito de *espaço-tempo*, i.e., uma representação geométrica que inclui – no mesmo gráfico – não só o espaço, mas também o tempo.

Consideremos dois referenciais de inércia: um primeiro referencial $S \mapsto (x, y, z)$ e um segundo referencial $S' \mapsto (x', y', z')$ que se afasta, em relação ao primeiro, com velocidade v . Admitamos que o movimento se efectua, apenas, ao longo do eixo x – tal como se indica na Fig. 2.


Figura 2

Dois referenciais de inércia S e S' em movimento relativo, afastando-se com velocidade $v = \beta c$. As origens dos dois referenciais O e O' coincidem quando $t = t' = 0$. Tem-se, obviamente, $y' = y$ e $z' = z$. De acordo com a crença (errada) da mecânica newtoniana, o tempo é absoluto, i.e., tem-se $t' = t$. Mas, por outro lado, o preconceito newtoniano da adição de velocidades (também errado) expressa-se através da equação $x' = x - vt$. Por exemplo: o movimento da origem O' descreve-se – do ponto de vista do referencial S – pela equação $x = vt$, que resulta de se fazer $x' = 0$ na equação $x' = x - vt$. Portanto, a trajectória (do ponto de vista de S') $x' = ut'$ de uma partícula, corresponde (agora do ponto de vista de S) a $x = x' + vt' = (u + v)t' = wt$. Logo, como $t' = t$, infere-se daqui a adição de velocidades $w = u + v$ da transformação de Galileu. Porém, do ponto de vista relativista, esta demonstração está *errada* porque parte de um pressuposto falso: o de que $t' = t$, i.e., o tempo é absoluto, ou, por outras palavras, a simultaneidade tem um significado universal – independente do referencial em que estamos.

Uma forma de tratar a transformação de Galileu é a de a representar num diagrama de espaço-tempo. Em relatividade, é costume definir o eixo vertical como sendo o eixo do tempo e o eixo horizontal como sendo o eixo do espaço. Ao fazê-lo estamos deliberadamente a ignorar uma representação quadridimensional do contínuo espaço-temporal. Reduzimos o palco do espaço-tempo a uma realidade simplificada bidimensional, onde existe uma única direcção espacial. Designemos este sistema simplificado por $S \mapsto (x, t)$ tal como se indica na Fig. 3.


Figura 3

Esta figura mostra uma representação *bidimensional* do espaço-tempo. O eixo espacial x é horizontal e o eixo temporal t é vertical. Um dado ponto A deste plano é designado por *acontecimento* a que corresponde o par ordenado (x_A, t_A) contendo as coordenadas deste acontecimento. Uma trajetória (linha) deste plano é designada por *linha de universo*. Nesta figura apresentam-se três linhas de universo: l_0 , l_1 e l_2 . A linha de universo l_0 corresponde à equação $x = x_0$ para todos os instantes, i.e., refere-se a uma partícula que se encontra estacionada na posição x_0 . Já a linha de universo l_1 representa uma partícula animada de movimento uniforme descrito pela equação $x - x_1 = ut$ (i.e., progride, com velocidade u , no sentido positivo do eixo x). Finalmente, a linha de universo l_2 representa uma partícula animada de movimento acelerado: em $t = 0$ a partícula encontra-se em $x = x_B$ e está animada de velocidade instantânea infinita; depois, a sua velocidade decresce até se anular no instante $t = t_A$, aí começando a movimentar-se na direcção diametralmente oposta; de seguida, a sua velocidade vai (novamente) aumentando até ao infinito em $t = t_B$. Como se verá adiante, esta linha de universo é impossível em teoria da relatividade restrita – mas, do ponto de vista da mecânica newtoniana, ela é (pelo menos, do ponto de vista teórico) possível. Em relação a esta

figura convém, desde já, salientar o seguinte: o eixo temporal t corresponde à equação $x=0$, i.e., todos os acontecimentos ao longo deste eixo ocorrem na mesma posição $x=0$. Por essa razão um eixo temporal designa-se por *equiloc*. Já o eixo espacial x corresponde à equação $t=0$, i.e., todos os acontecimentos ao longo deste eixo ocorrem no mesmo instante $t=0$. Por essa razão um eixo espacial designa-se por *equitemp*. Neste gráfico um acontecimento resulta da intersecção de uma *equiloc* com uma *equitemp*. Por exemplo: o acontecimento C resulta da intersecção da *equiloc* $x=x_B$ com a *equitemp* $t=t_A$. Todas as *equilocs* são paralelas entre si – tal como todas as *equitemps*. Os acontecimentos A e C são simultâneos. Os acontecimentos B e C ocorrem na mesma posição.

A próxima figura, a Fig. 4, representa graficamente uma transformação de Galileu.

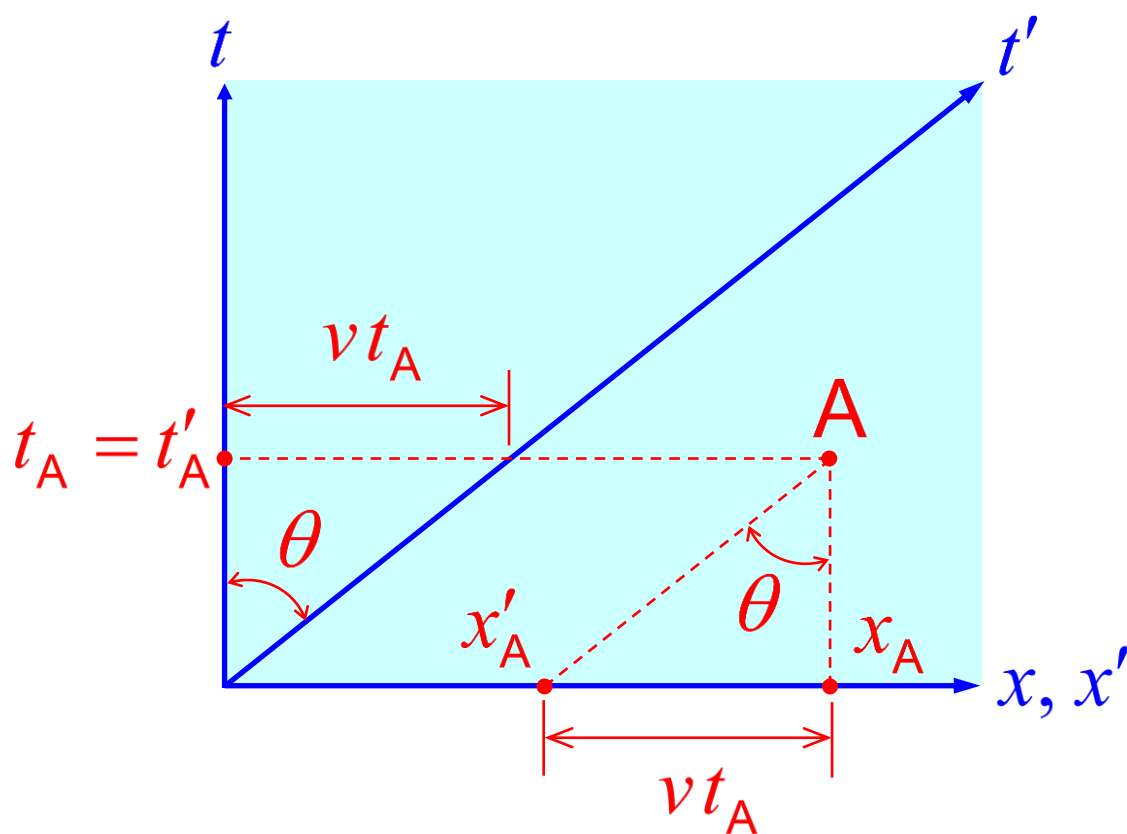


Figura 4

Esta figura representa graficamente uma transformação de Galileu. No referencial S o acontecimento A tem coordenadas (x_A, t_A) e, no referencial S' , coordenadas (x'_A, t'_A) , tais que $t'_A = t_A$ (as *equitemps* dos dois referenciais de inércia são paralelas entre si) e $x'_A = x_A - vt_A$. O eixo t'

corresponde à *equiloc* $x' = 0$ (em S') dada pela equação $x = vt$ (em S) e que intersecta a *equiloc* $x = 0$ (o eixo t) na origem dos dois sistemas de coordenadas. Como não existe qualquer limite cósmico para as velocidades, o ângulo θ da figura é tal que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, tendo-se $\theta = 0$ para $v = 0$. Note-se que $\text{sgn}(\theta) = \text{sgn}(v)$. Quando $v \rightarrow \infty$ vem $\theta \rightarrow \pi/2$. Notemos, contudo, que existe aqui um problema de unidades: os eixos temporal e espacial não têm as mesmas unidades SI. Podemos ultrapassar isso impondo unidades (ditas *geométricas*) em que $c = 1$. Por exemplo: o tempo é medido em segundos e o espaço em segundos-luz. Nestas condições, $\theta = \pi/4$ quando $v = c = 1$. Em geral, tem-se (com estas unidades geométricas)

$$\tan(\theta) = \beta.$$

De facto, define-se (caso geral, e.g., em unidades SI)

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

No caso específico de se utilizarem as unidades geométricas, é $v = \beta$ pois $c = 1$. Na transformação de Galileu, $-\infty < \beta < \infty$.

Como $y' = y$ e $z' = z$, apenas nos interessa a transformação (ver Fig. 2)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Notemos, no entanto, que nada – do ponto de vista estritamente conceptual – impede a possibilidade de velocidades infinitas: $-\infty < v < \infty$.

A Fig. 4 é, portanto, a resposta à seguinte questão: qual é a representação gráfica que corresponde a esta transformação matricial?

Notemos, desde logo, que – numa transformação de Galileu – a simultaneidade é um conceito *absoluto*. Isto significa «apenas» que as *equitemps* de $S \mapsto (x, t)$ têm de ser paralelas às *equitemps* de $S' \mapsto (x', t')$. O mesmo não se aplica em relação às *equilocs* dos dois referenciais de inércia.

Já vimos o que está errado com a transformação de Galileu: a adição de velocidades está em contradição com o segundo postulado. E, como o segundo postulado tem uma base experimental inequivocamente sólida, devemos colocar em questão a adição de velocidades.

Mas, antes de se procurar uma nova lei de composição de velocidades, há que tentar descobrir o que está errado com a Fig. 4 (que não é mais do que uma representação gráfica da transformação de Galileu).

Na construção do diagrama de espaço-tempo da Fig. 4 adoptou-se um princípio básico – o de que as *equitemps* de S são paralelas às *equitemps* de S' . Este princípio resulta de uma crença (que, agora, temos de colocar em questão): a ideia newtoniana de que o tempo é absoluto. No caso específico da Fig. 4, admitiu-se (em resultado dessa crença) que $t'_A = t_A$.

O segundo postulado traz consigo todo o potencial revolucionário da relatividade restrita. É apenas necessário saber extrair deste princípio todas as consequências físicas.

Das equações de Maxwell resulta que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Esta equação (escrita em unidades SI) tem uma primeira leitura: *a luz é um fenómeno electromagnético*.

Ou seja: através desta equação unificam-se três mundos (aparentemente) distintos: o mundo da electricidade (através de ϵ_0), o mundo do magnetismo (através de μ_0) e, finalmente, o mundo da óptica (através de c). No vácuo vigoram as relações constitutivas $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Equações} \\ \text{de} \\ \text{Maxwell} \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{bmatrix}$$

Então, de acordo com o primeiro postulado (o princípio da relatividade), ou estas equações são válidas em todos os referenciais de inércia ou estas equações estão erradas. Mas estas equações – as equações de Maxwell – estão correctas (esta afirmação é, de facto, uma das verdades mais solidamente estabelecidas em física no domínio macroscópico; a mecânica quântica levou a electrodinâmica quântica a ser reformulada na forma de electrodinâmica quântica – a primeira teoria quântica de um campo).

Como é que o próprio Maxwell compatibilizava as suas equações com a transformação de Galileu da adição de velocidades? Admitia ele (e todos os físicos pré-relativistas) que estas equações só eram válidas em relação ao tal meio estacionário denominado por *éter luminífero*.

Desde 1983 que se define o metro como sendo a distância percorrida pela luz (no vácuo) num intervalo temporal

$$\Delta t = \frac{1}{299\,792\,458} \text{ s}.$$

Ou seja: a velocidade da luz é uma constante universal e tem o valor (exacto) no sistema SI

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Além disso, também se define o valor (exacto) da permeabilidade magnética (do vácuo) como sendo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Daqui decorre que a permitividade eléctrica (do vácuo) é

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}.$$

Em termos numéricos, vem

$$\epsilon_0 \approx 8.854187817620389 \times 10^{12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Como o valor numérico da velocidade da luz desempenha um papel fundamental em teoria da relatividade restrita, é costume introduzir *unidades geométricas* em que se faz (por definição):

$$\boxed{\text{unidades geométricas}} \mapsto \boxed{c = 1}.$$

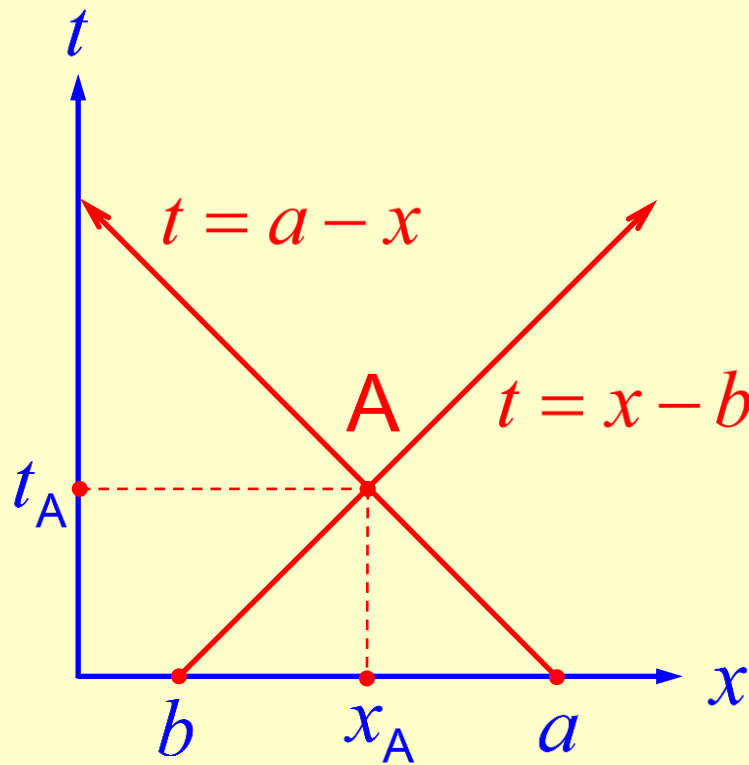
Existem basicamente duas possibilidades (mantendo ou o metro, como medida de espaço, ou o segundo, como medida de tempo).

- Primeira possibilidade: o tempo é medido em segundos e, neste caso, o espaço é medido em segundos-luz;
- Segunda possibilidade: o espaço é medido em metros e, neste caso, o tempo em metros-luz.

Um segundo-luz é a *distância* percorrida pela luz num segundo. Um metro-luz é o *tempo* que a luz demora a percorrer um metro. Portanto,

$$\left[\begin{array}{l} 1 \text{ segundo-luz} = 299\,792\,458 \text{ m}, \\ 1 \text{ metro-luz} \approx 3.335640951981520 \text{ ns}. \end{array} \right.$$

De acordo com estas unidades (geométricas) um sinal de luz (ou, mais geralmente, um qualquer sinal electromagnético) tem uma inclinação de $\pm 45^\circ$ como se indica na Fig. 5.


Figura 5

Indicam-se dois sinais electromagnéticos num sistema de coordenadas $S \mapsto (x, t)$ de um dado referencial de inércia. Usam-se unidades geométricas em que (se considera) $c=1$. O sinal electromagnético que se propaga no sentido *positivo* do eixo x é caracterizado pela equação $t = x - b$. Por sua vez, o sinal electromagnético que se propaga no sentido *negativo* do eixo x é caracterizado pela equação $t = a - x$. O acontecimento $A \mapsto (x_A, t_A)$, onde estes dois sinais se encontram, tem coordenadas

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(a+b), \\ t_A = \frac{1}{2}(a-b). \end{cases}$$

O primeiro sinal, de equação $t = x - b$, tem uma inclinação (em relação ao eixo x positivo) de $\pi/4$; o segundo sinal, de equação $t = a - x$, tem uma inclinação (em relação ao eixo x positivo) de $3\pi/4$. Todos os sinais electromagnéticos têm de ser – em *qualquer* referencial de inércia – paralelos a um destes sinais. É isto que estipula o segundo postuldo. Uma das consequências imediatas deste segundo postuldo é a falência da universalidade do conceito de simultaneidade. Mais precisamente: como se verá adiante, as *equitemps* de um referencial de inércia não podem ser paralelas às *equitemps*

doutro referencial de inércia (distinto do anterior). É aqui que a relatividade restrita diverge profundamente do que se mostra na Fig. 4 (que, como se viu, traduz a transformação de Galileu). Uma nova transformação de coordenadas é, portanto, necessária. Essa nova transformação é designada por transformação de Lorentz. O correspondente diagrama de espaço-tempo designa-se por diagrama de Minkowski.

É importante introduzir, aqui, uma nota final sobre a velocidade da luz. Em electrodinâmica clássica é necessário entender o que é um meio material: é um conjunto de cargas e correntes que, macroscopicamente, altera as relações constitutivas do vácuo. Uma consequência dessa alteração é a seguinte: um meio material simples (homogéneo, linear, isotrópico e independente do tempo) pode ser descrito por um certo índice de refração n . Além disso, se não existir dispersão, este índice de refração é uma constante que não depende da frequência (na realidade isso não é fisicamente possível num meio com inércia na sua resposta). Assim, a velocidade da luz será (nesse modelo simples de um meio)

$$v = \frac{c}{n} .$$

O vácuo (ou um meio invariante numa transformação de Lorentz) é aquele que tem $n=1$ e, conseqüentemente, em que $v=c$.

Porém, é necessário esclarecer o seguinte: por que razão o segundo postulado fala na luz? Que razão misteriosa leva a luz a desempenhar um papel tão importante em teoria da relatividade restrita? A resposta é a seguinte: na verdade o segundo postulado deveria ser formulado de uma forma mais isenta.

Essa forma mais moderna de formular o segundo postulado é a que a seguir se apresenta.

- **Formulação moderna do segundo postulado:** existe um limite *finito* máximo (que se dirá *limite cósmico*) para a velocidade de propagação de uma partícula fundamental (bosão ou fermião). Seja $0 < V < \infty$ o valor desse limite cósmico. Se a partícula fundamental em causa tiver massa nula, então a velocidade dessa partícula é, em qualquer referencial de inércia, V . Acontece que todas as experiências feitas, até ao momento, levam a crer que o fóton é uma partícula de massa nula. É nesse sentido que se faz $V=c$, i.e., identifica-se (na prática) o limite cósmico das velocidades com o valor numérico $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ou seja: nada existe de especialmente importante na luz. A não ser o seguinte: as partículas (bosões) portadoras da interacção electromagnética – conhecidas por *fótons* – não têm massa. É por essa razão que o limite cósmico das velocidades é idêntico à velocidade da luz (no vácuo). E que, portanto, se tem

$$V = c .$$

É provável que existam outras partículas de massa nula – além do fóton. Pensava-se que os neutrinos tinham massa nula. Hoje sabe-se que, apesar de terem uma massa muito reduzida, os neutrinos não têm massa nula (os prémios Nobel da física de 2015, Arthur B. McDonald e Takaaki Kajita, provaram que pelo menos duas espécies de neutrinos devem ter massa não nula). Os gravitões deverão ter massa nula. Outros bosões elementares deverão ter massa nula – é o caso dos glúões (apesar de não ser possível detectar estas partículas na forma livre).

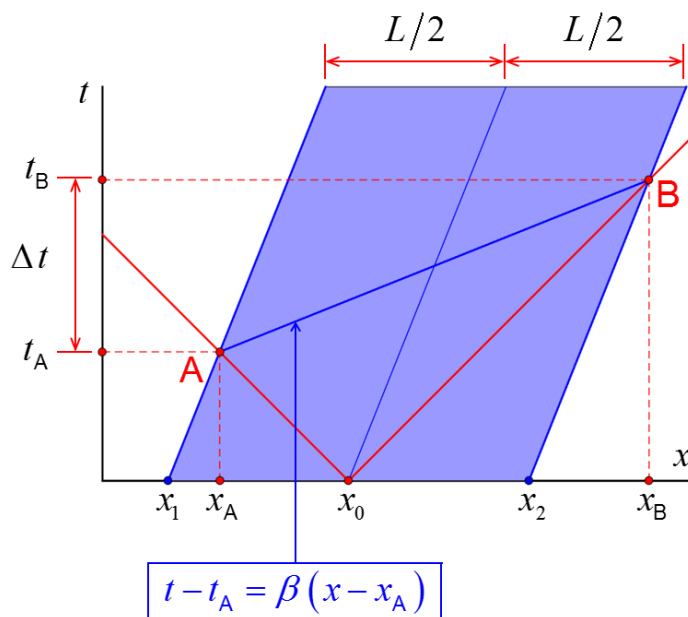
2. Geometria da simultaneidade

A geometria da simultaneidade é, talvez, a forma mais clara e marcante de apresentar, do ponto de vista pedagógico, a relatividade deste conceito em teoria da relatividade restrita.

Sem mais delongas a Fig. 6 resume o que se pretende aqui explicar: dois acontecimentos A e B, que são simultâneos em S' , não são simultâneos em S .

Figura 6

Esta figura considera uma velocidade relativa (unidades geométricas) $\beta = 2/5$ e apresenta, apenas, o ponto de vista do referencial $S \mapsto (x, t)$.



O sistema de coordenadas S' , por sua vez, corresponde ao interior de um vagão de comboio, de comprimento próprio L_0 . Nada se sabe, à partida, sobre a relação entre L_0 e L . O sistema de coordenadas S corresponde, por sua vez, à estação de comboios. Utiliza-se, para simplificar as nossas equações, unidades geométricas em que se considera $c = 1$. A Fig. 6, repete-se aqui para que não haja qualquer dúvida, refere-se (apenas) ao ponto de vista de $S \mapsto (x, t)$.

A experiência efectuada, e que a figura descreve, é a seguinte: um viajante, colocado dentro e exactamente a meio do vagão, emite simultaneamente (do seu ponto de vista, i.e., de S') dois sinais electromagnéticos em sentidos diametralmente opostos. Um dos sinais alcança o extremo esquerdo do vagão no acontecimento A e o outro sinal alcança o extremo direito do vagão no acontecimento B . A figura mostra estes dois sinais – porém tal como são observados no referencial S da estação.

A conclusão fundamental é a seguinte:

- Do ponto de vista do observador colocado no interior do vagão (e que emitiu os dois sinais), os acontecimentos A e B são simultâneos porque tiveram de percorrer o mesmo espaço $\Delta x' = L_0/2$ com a mesma velocidade $c = 1$. Ou seja: $t'_A = t'_B = L_0/2 \mapsto \Delta t' = t'_B - t'_A = 0$.
- Do ponto de vista de um observador colocado na estação (e que vê o comboio em andamento da esquerda para a direita), os acontecimentos A e B não são simultâneos: a Fig. 6 mostra, com efeito, que A é anterior a B . Ou seja: $t_A < t_B \mapsto \Delta t = t_B - t_A > 0$.

Façamos algumas contas elementares.

No referencial S , da estação, o sinal electromagnético que é emitido em direcção ao extremo direito do vagão tem a equação $t = x - x_0$. Já o sinal electromagnético emitido em direcção ao extremo esquerdo do vagão tem a equação $t = x_0 - x$. A linha de universo do extremo esquerdo do vagão corresponde a $x - x_1 = \beta t$. A linha de universo do extremo direito do vagão, por sua vez, corresponde a $x - x_2 = \beta t$. Tem-se $x_1 = x_0 - L/2$ e $x_2 = x_0 + L/2$.

Portanto,

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \mapsto \begin{cases} A \mapsto x_0 - t_A = x_1 + \beta t_A \\ B \mapsto x_0 - t_B = x_2 + \beta t_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_A = \frac{L}{2(1+\beta)} \\ t_B = \frac{L}{2(1-\beta)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta t = t_B - t_A = \gamma^2 \beta L}.$$

Assim, vem

$$\begin{cases} x_A = x_0 - t_A = x_0 - \frac{L}{2(1+\beta)} \\ x_B = x_0 + t_B = x_0 + \frac{L}{2(1-\beta)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta x = x_B - x_A = \gamma^2 L}.$$

Conclui-se, deste modo, que a *equitemp* (do referencial S') que une os acontecimentos A e B deve ter a seguinte equação:

$$t - t_A = m(x - x_A).$$

Porém, o declive m determina-se imediatamente:

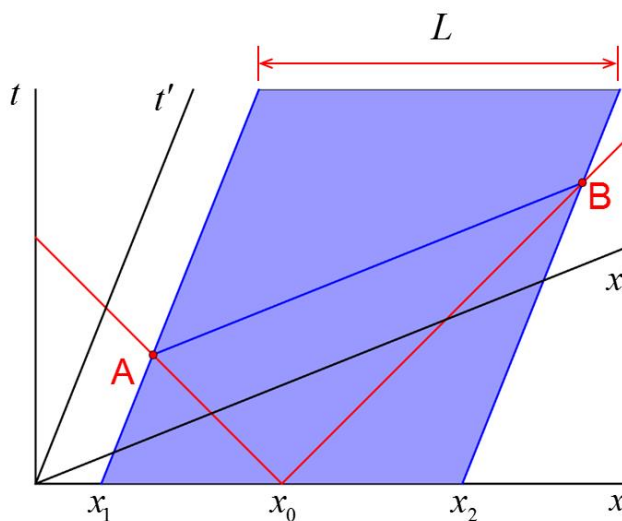
$$m = \frac{t_B - t_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\gamma^2 \beta L}{\gamma^2 L} \quad \therefore \quad \boxed{m = \beta}.$$

Isto significa que a *equiloc* $x' = 0$ (i.e., o eixo t') tem a equação $x = \beta t$ e que a *equitemp* $t' = 0$ (i.e., o eixo x') tem a equação $t = \beta x$. Fica, assim, demonstrada a construção dos eixos (x' , t') do diagrama de Minkowski. No entanto, na Fig. 6 não estão representados estes eixos pois tornariam esta figura demasiado pesada. A sua construção, porém, é óbvia: está feita na Fig. 7.

$$\boxed{\text{Valores numéricos}} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline \beta = 0.4 & \gamma = 1.0911 \\ \hline L_0 = 2 & L = 1.8330 \\ \hline t_A = 0.6547 & t_B = 1.5275 \\ \hline \end{array} \mapsto \boxed{\Delta t = 0.8729}$$

Figura 7

Nesta figura apresentam-se os eixos t' e x' correspondentes à Fig. 6.



O eixo t' é paralelo aos dois extremos (esquerdo e direito) do vagão e tem a equação $x' = 0$ (é uma *equiloc* de S'). No referencial S a equação respectiva é $x = \beta t$. O eixo x' é paralelo ao segmento de recta que une os dois acontecimentos A e B e tem a equação $t' = 0$ (é uma *equitemp* de S'). No referencial S a respectiva equação é $t = \beta x$ (ver Fig. 6). Como os declives destes dois eixos (t' e x') são recíprocos um do outro, o ângulo entre os eixos x e x' é o mesmo que o ângulo entre os eixos t e t' . Designemos esse ângulo por θ . Tem-se, portanto,

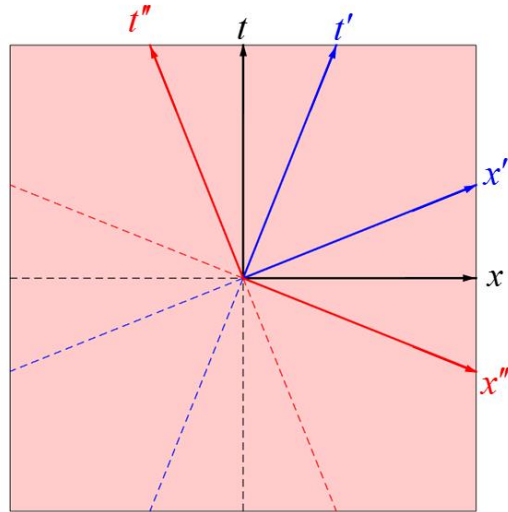
$$\left[\begin{array}{l} \text{eixo } t' \mapsto x' = 0 \mapsto x = \beta t \\ \text{eixo } x' \mapsto t' = 0 \mapsto t = \beta x \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{\tan(\theta) = \beta}.$$

Assim, fica demonstrado que as *equitemps* de S **não** são paralelas às *equitemps* de S' . Por outras palavras: *na relatividade restrita a simultaneidade é um conceito relativo* – depende do referencial de inércia considerado. O ângulo entre as duas famílias de *equitemps* (as *equitemps* de S e as *equitemps* de S') é θ e depende da velocidade relativa β (como se indica na Fig. 8 para um caso especial).

Desfaz-se, assim, a crença errada da mecânica newtoniana segundo a qual o tempo era absoluto. O fluir do tempo depende do referencial considerado; o tempo é relativo e não absoluto. O «common sense» nem sempre é, em ciência, um bom conselheiro.

Figura 8

Esta figura mostra que o ângulo θ depende da velocidade do movimento relativo entre referenciais.

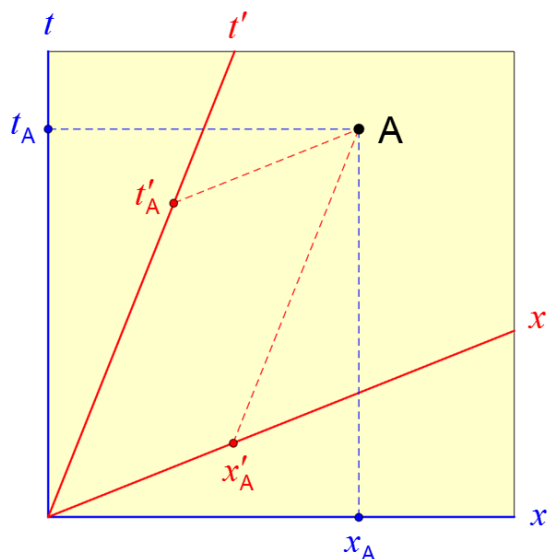


O referencial S' desloca-se ao longo do sentido positivo do eixo x de S com velocidade $\beta = 2/5$. Por sua vez, o referencial S'' desloca-se ao longo do sentido positivo do eixo x de S com uma velocidade $\beta = -2/5$. Quando $\beta \rightarrow 1$ o eixo t' e o eixo x' tendem a coincidir para a recta $t = x$. Quando $\beta \rightarrow -1$ o eixo t'' tende a coincidir com o eixo $-x''$ para a recta $t = -x$.

Na Fig. 9 mostra-se um dado acontecimento A do ponto de vista dos dois referenciais S e S' .

Figura 9

Nesta figura mostram-se as coordenadas de um dado acontecimento A em relação quer a S quer a S' .



O acontecimento A é determinado pela intersecção de uma *equiloc* com uma *equitemp* de um dado sistema de coordenadas. Assim, tem-se $S \mapsto (x_A, t_A)$ e $S' \mapsto (x'_A, t'_A)$. Trata-se, aqui, de uma construção geométrica. O leitor facilmente conseguirá, usando esta construção, indicar dois acontecimentos que sejam simultâneos do ponto de vista de S mas que não sejam simultâneos do ponto de vista de S' ; e, reciprocamente, dois acontecimentos que sejam simultâneos do ponto de vista de S' mas que não sejam simultâneos do ponto de vista de S .

Antes de prosseguir vamos introduzir alguma terminologia e notação. A velocidade relativa entre dois referenciais é designada por v em unidades SI e por β quando se faz $c = 1$. Ainda em unidades SI, o significado de β é o de uma velocidade normalizada e adimensional, tal que

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

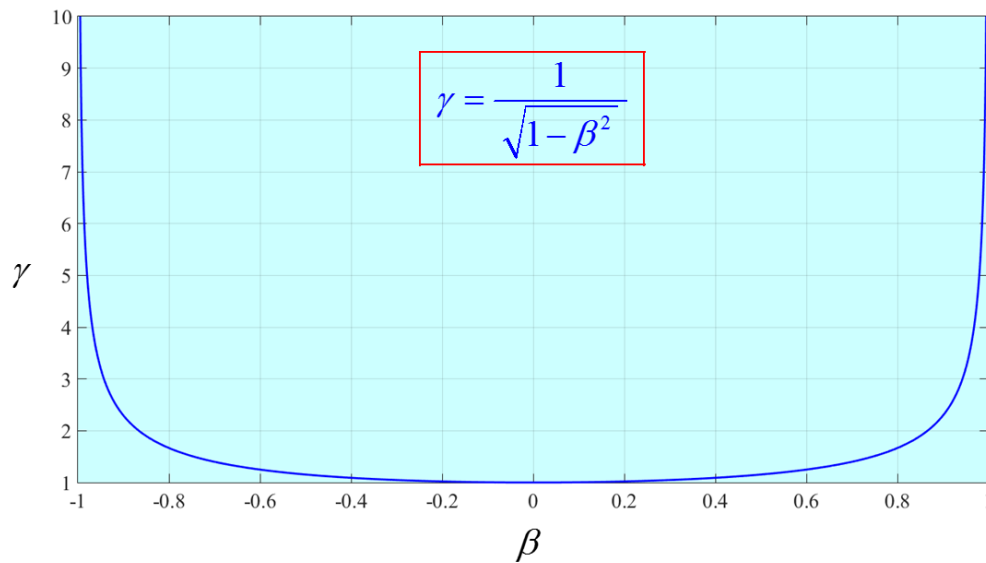
Frequentemente utiliza-se o factor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Quando se tem $-1 \leq \beta \leq 1$, vem $\gamma \geq 1$. A Fig. 10 representa a função $\gamma = \gamma(\beta)$.

Figura 10

Nesta figura representa-se graficamente o factor γ em função da velocidade (normalizada) relativa β para $\beta \in]-1, 1[$.



Tem-se

$$\lim_{\beta \rightarrow \pm 1} (\gamma) = +\infty .$$

3. Equilocs e equitemps

Em relatividade restrita um observador é caracterizado por um certo referencial de inércia. Frequentemente, até, identificamos os dois conceitos. Assim, um dado sistema de coordenadas (que se identifica com um determinado referencial de inércia) $S \mapsto (x, t)$ corresponde a um observador \mathcal{O} . O eixo temporal deste sistema de coordenadas é a *equiloc* $x=0$ e podemos identificar esta *equiloc* com (o próprio observador) \mathcal{O} . O eixo espacial deste sistema de coordenadas é, por sua vez, a *equitemp* $t=0$ e podemos identificar esta *equitemp* com \mathcal{O}_\perp . No caso geral, porém, basta considerar uma *equiloc* com $x = x_0$ e uma *equitemp* com $t = t_0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{referencial de inércia} \\ S \mapsto (x, t) \end{array}} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{equiloc de } S \mapsto \text{eixo } t \mapsto \text{eixo } \mathcal{O} \mapsto \boxed{x=0} \\ \text{equitemp de } S \mapsto \text{eixo } x \mapsto \text{eixo } \mathcal{O}_\perp \mapsto \boxed{t=0} \end{array} \right]$$

Na literatura também se designa o eixo \mathcal{O} por «relógio»: o tempo pode ser medido ao longo desta linha recta com uma fita métrica. Com efeito, o eixo temporal não faz mais do que medir o tempo num determinado sistema S de coordenadas.

Consideremos, agora, um novo observador \mathcal{P} que, do ponto de vista de \mathcal{O} , se move de acordo com a equação $x = \beta t$. Do próprio (de \mathcal{P}) ponto de vista, porém, a sua linha de universo (*equitemp* de \mathcal{P}) é $x' = 0$. Então, tal como se viu anteriormente, a equação – do ponto de vista de \mathcal{O} – da *equiloc* (do novo observador) será \mathcal{P}_\perp tal que $t = \beta x$ e que, do seu próprio (de \mathcal{P}) ponto de vista, corresponde a $t' = 0$.

Se o observador \mathcal{P} se afasta do observador \mathcal{O} com velocidade β , o observador \mathcal{O} afasta-se de \mathcal{P} com velocidade $-\beta$. Podemos, deste modo, elaborar a tabela seguinte.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{O}_\perp \mapsto \text{eixo } x \mapsto t=0 \text{ (equitemp de } S) \mapsto t' = -\beta x' \\ \mathcal{O} \mapsto \text{eixo } t \mapsto x=0 \text{ (equiloc de } S) \mapsto x' = -\beta t' \\ \mathcal{P}_\perp \mapsto \text{eixo } x' \mapsto t'=0 \text{ (equitemp de } S') \mapsto t = \beta x \\ \mathcal{P} \mapsto \text{eixo } t' \mapsto x'=0 \text{ (equiloc de } S') \mapsto x = \beta t \end{array} \right]$$

Recordemos que, do ponto de vista da geometria euclidiana, existe um ângulo entre \mathcal{O} e \mathcal{P} que é igual ao ângulo entre \mathcal{O}_\perp e \mathcal{P}_\perp . Se se designar esse ângulo por θ , tem-se (como se viu)

$$\boxed{\tan(\theta) = \beta}.$$

Este ângulo é, portanto, univocamente determinado pela correspondente velocidade relativa entre os dois observadores (ou referenciais de inércia). Este ângulo é euclidiano e, portanto, *impróprio* para (verdadeiramente) representar um ângulo no plano de Minkowski.

Num dado sistema de coordenadas $S \leftrightarrow \mathcal{O}$ todas as *equilocs* são paralelas entre si. O mesmo se aplica em relação às respectivas *equitemps*. As *equilocs* são, por definição, ortogonais às *equitemps*. Porém, ortogonalidade não significa – aqui – o mesmo que perpendicularidade (no seu usual sentido euclidiano).

Como veremos, adiante, a física relativista implica uma geometria que não é euclidiana – os diagramas de Minkowski mostram, com efeito, que estamos num novo tipo de geometria. A *métrica* deixou de ser *euclidiana* (com formas quadráticas definidas positivas) e passou a ser *lorentziana* (com formas quadráticas indefinidas).

O plano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ euclidiano, com $x^2 + y^2 = \varrho^2 \geq 0$ (em que $\varrho = 0$ sse $x = y = 0$), tem de ser substituído pelo plano $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ hiperbólico, com $x^2 - t^2 \in \mathbb{R}$, onde são permitidas três possibilidades, a saber:

- $x^2 - t^2 > 0$;
- $x^2 - t^2 = 0$;
- $x^2 - t^2 < 0$.

Para que fique mais claro, propomos – desde já – uma imagem para o que se acaba de afirmar.

Seja $\mathcal{O}(0,0)$ um dado acontecimento escolhido como origem comum dos dois sistemas de coordenadas $S \mapsto (x, t)$ e $S' \mapsto (x', t')$. Então, um dado acontecimento A tanto pode ser representado pelo par ordenado $(x_A, t_A) \in S$ como pelo par ordenado $(x'_A, t'_A) \in S'$. Seja

$$x_A^2 - t_A^2 = (x'_A)^2 - (t'_A)^2 = \pm s^2, \quad s^2 \geq 0.$$

O conjunto dos acontecimentos $(x, t) \in S$ que estão no *mesmo* intervalo de espaço-tempo – em relação ao acontecimento $\mathcal{O}(0,0)$ – têm necessariamente que pertencer a uma das seguintes linhas:

- Hipérbole de equação $x^2 - t^2 = \xi^2$, se $x_A^2 - t_A^2 = \xi^2 > 0$;
- Rectas de equação $x = \pm t$, se $x_A^2 - t_A^2 = 0$;
- Hipérbole de equação $t^2 - x^2 = \tau^2$, se $t_A^2 - x_A^2 = \tau^2 > 0$.

O que se acaba de afirmar resulta de um teorema fundamental (invariância do intervalo de espaço-tempo) que se irá demonstrar mais adiante: se A e B são dois acontecimentos quaisquer do plano hiperbólico, então

$$(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 = (t'_A - t'_B)^2 - (x'_A - x'_B)^2 \in \mathbb{R}.$$

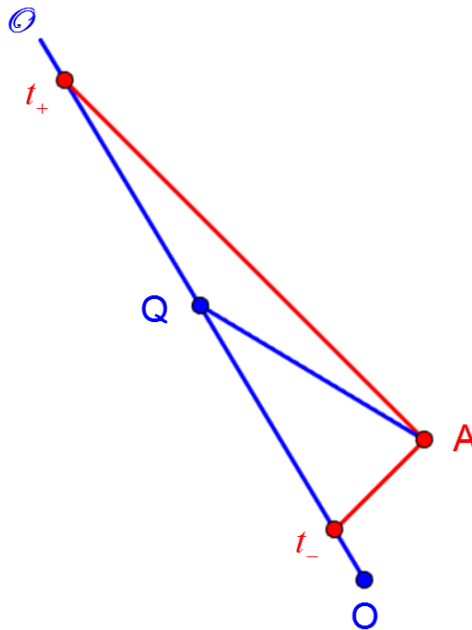
Porém, voltemos ao que nos propomos estabelecer nesta secção: construir, com generalidade, as *equilocs* e *equitemps* de dois observadores em movimento relativo.

Comecemos por considerar um observador arbitrário que designamos por \mathcal{O} . Pretendemos, para já, determinar as coordenadas (x_A, t_A) de um dado acontecimento A do ponto de vista de \mathcal{O} .

A Fig. 11 ilustra esta situação.

Figura 11

A um dado observador corresponde uma *equiloc* \mathcal{O} . Esta *equiloc* é uma linha recta caracterizada pela equação $x = 0$ (que nada obriga a ser vertical).



Pretende-se, portanto, determinar as coordenadas (x_A, t_A) do acontecimento A do ponto de vista do observador \mathcal{O} . Para esse efeito utiliza-se o método do radar de Bondi. O observador \mathcal{O} envia um sinal electromagnético, emitido no instante t_- , em direcção a A . Assim que este sinal é recebido em A , é reflectido de volta para o observador \mathcal{O} sendo aí recebido no instante t_+ . Assim, a questão é a seguinte: quais são as coordenadas (x_A, t_A) do acontecimento A em função dos instantes medidos (na *equiloc* \mathcal{O}) e que foram designados por t_- e t_+ ?

A resposta é fácil: o sinal electromagnético teve dois percursos (ida e volta). Como o acontecimento A está a uma distância fixa x_A da *equiloc* $x = 0$, o tempo que o sinal gasta no percurso de ida é o mesmo que o sinal gasta no percurso de volta. E, como a velocidade dos sinais electromagnéticos é

(em unidades geométricas, que são as utilizadas aqui) $c = 1$, infere-se que o tempo de ida é igual ao tempo de volta e corresponde a x_A . Ou seja,

$$x_A = \frac{1}{2}(t_+ - t_-).$$

Assim, o acontecimento sobre o eixo \mathcal{O} que é simultâneo com o acontecimento $A(x_A, t_A)$ é o acontecimento $Q(0, t_A)$ que está no ponto médio entre o acontecimento emissão $P_-(0, t_-)$ e o acontecimento recepção $P_+(0, t_+)$ do sinal electromagnético, i.e.,

$$t_A = \frac{1}{2}(t_+ + t_-).$$

Na Fig. 11 o acontecimento origem (do espaço e do tempo) é $O(0, 0)$.

A Fig. 11 revela assim, de uma forma muito simples, como é possível determinar a *equitemp* \mathcal{O}_\perp que passa pelo acontecimento $A(x_A, t_A)$. Essa *equitemp* contém o segmento de recta que liga os acontecimentos Q a A .

As duas equações anteriores permitem, inversamente, calcular t_+ e t_- a partir das coordenadas t_A e x_A . De facto, adicionando e subtraindo (ordenadamente) essas duas equações, obtém-se

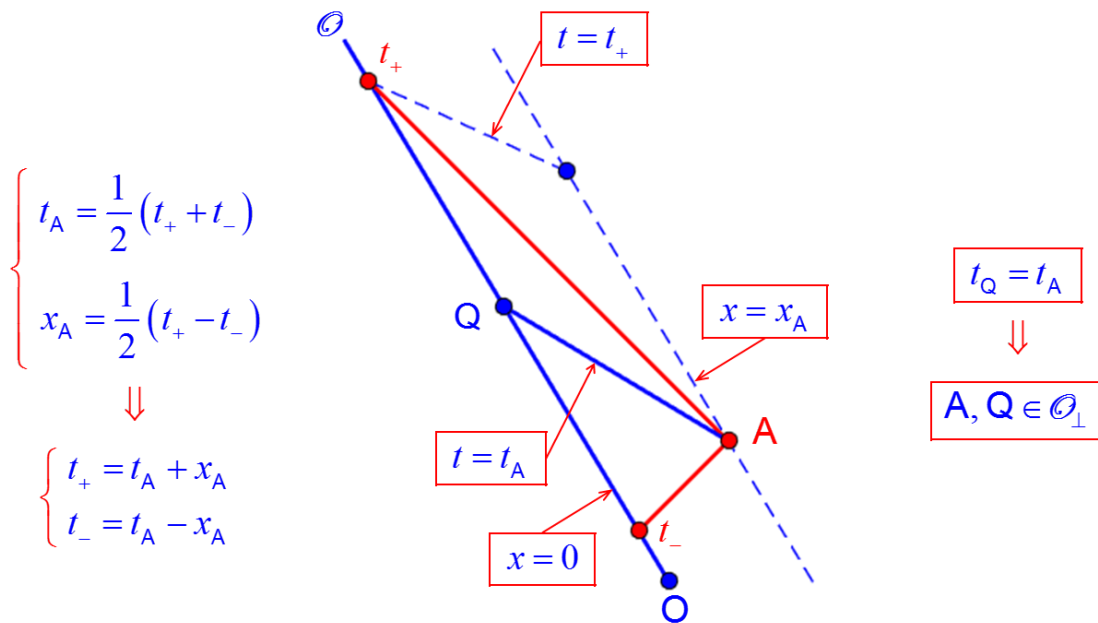
$$\begin{cases} t_+ = t_A + x_A, \\ t_- = t_A - x_A. \end{cases}$$

A Fig. 12 repete a Fig. 11 mas contendo mais pormenores.

Figura 12

Os pormenores adicionados na Fig. 12 permitem esclarecer a construção da Fig. 11. Estes pormenores tornam a Fig. 12 um pouco densa de informação – daí se ter optado por deixar a Fig. 11 nua (i.e., sem esta informação adicional). Não obstante, é essencial que um neófito entenda – logo desde o início – que as *equilocs* não têm de ser verticais, as *equitemps* não têm de ser horizontais e que, finalmente, as *equitemps* não têm de ser perpendiculares (no sentido euclidiano) às *equilocs* – mas são, não obstante, ortogonais entre si (embora isso implique uma profunda revisão do conceito de ortogonalidade e, conseqüentemente, de métrica).

Um leitor não deve avançar em relação a esta figura sem a entender totalmente. Só depois de esse entendimento estar assegurado é que deve, então, passar ao estudo do que se segue. Ou seja: é necessária uma leitura activa e não meramente passiva.

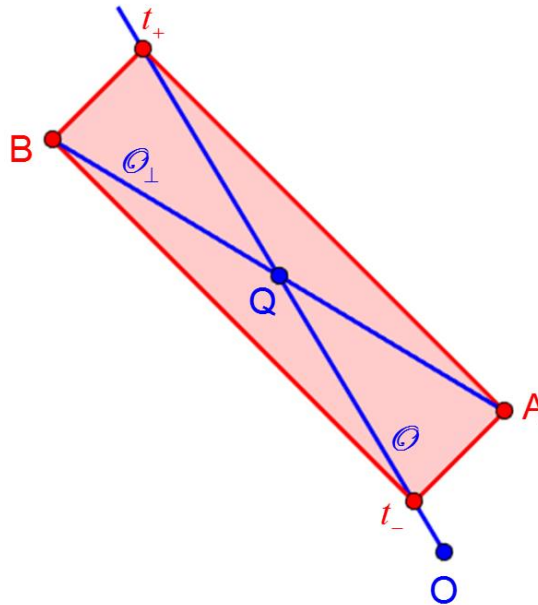


A Fig. 13 mostra o objectivo último das duas figuras anteriores: a construção de um rectângulo de luz cujas diagonais são uma *equiloc* e uma *equitemp*. O centro deste rectângulo luminoso é o acontecimento Q das Figs. 11 e 12.

Figura 13

Nesta figura apresenta-se o rectângulo de luz construído a partir da *equiloc* \mathcal{O} , dos instantes (t_-, t_+) medidos sobre \mathcal{O} e do acontecimento $A(x_A, t_A)$. Os quatro lados deste rectângulo são sinais luminosos (ou, mais geralmente, sinais electromagnéticos). Um dos pontos deste rectângulo é o próprio acontecimento $A(x_A, t_A)$. Os outros três pontos são os seguintes: os acontecimentos $P_-(0, t_-)$ e $P_+(0, t_+)$ e, ainda, o acontecimento $B(-x_A, t_A)$. O centro do rectângulo é o acontecimento $Q(0, t_A)$ que resulta da intersecção da *equiloc* \mathcal{O} correspondente a $x=0$ com a *equitemp* \mathcal{O}_\perp correspondente a $t=t_A$. Note-se que, usualmente, se considera o eixo x como a *equitemp* (necessariamente paralela a \mathcal{O}_\perp) mas que passa pelo acontecimento $O(0, 0)$. Sublinhe-se, aqui, o seguinte: a noção de paralelismo é definida no âmbito de um espaço afim (um conceito de espaço ainda mais geral do que o de espaço vectorial); a noção de ortogonalidade (que, como se disse atrás, deve ser despida da sua tradução paroquial e euclidiana de perpendicularidade), porém, transcende em muito o próprio âmbito dos espaços afim e vectorial. A noção de ortogonalidade requer um conceito mais localizado de espaço quadrático, i.e., de um espaço vectorial ao qual se acrescentou uma nova estrutura: uma métrica que resulta da introdução de uma forma quadrática que não tem de

ser definida positiva (tal como a métrica euclidiana). Uma métrica está associada à noção de norma ou de «distância» e, como iremos ver, essa noção não deve ser necessariamente associada à distância euclidiana. Em relatividade uma outra métrica tem de ser definida – uma métrica que brota naturalmente da relatividade restrita de Einstein mas que recebeu uma contribuição fundamental de Hermann Minkowski (22 de Junho de 1864 – 12 de Janeiro de 1909).

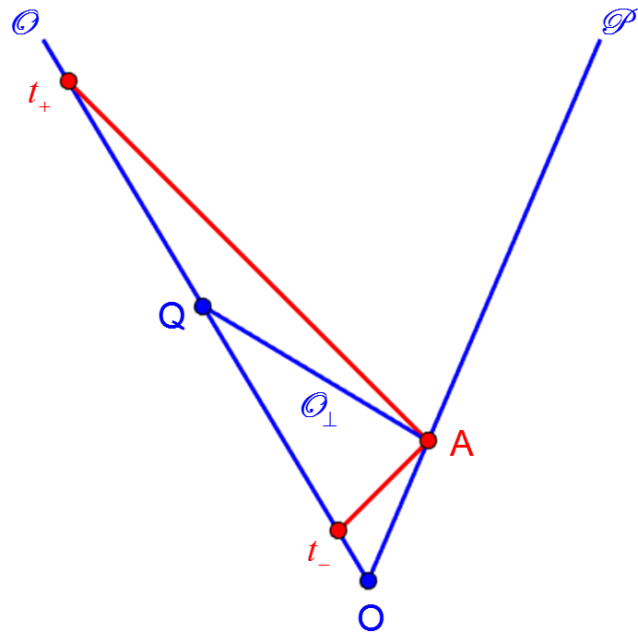


Na Fig. 13 a equiloc \mathcal{O} é ortogonal à equitemp \mathcal{O}_\perp . Porém, como é bem visível, não existe uma relação de perpendicularidade (euclidiana) entre estas duas linhas: a Fig. 13 está desenhada no chamado plano hiperbólico – não no vulgar plano euclidiano.

O problema que se coloca a seguir pode ser mais claramente expresso através da Fig. 14. Nesta nova figura o acontecimento A das Figs. 11—13 pertence, agora, a um (novo) observador definido pela (nova) equiloc \mathcal{P} . As equilocs \mathcal{O} e \mathcal{P} têm um único acontecimento em comum – o acontecimento $O(0, 0)$. Existe, portanto, uma velocidade relativa β que caracteriza o progressivo afastamento entre os dois referenciais de inércia $\mathcal{O} \mapsto S(x, t)$ e $\mathcal{P} \mapsto S'(x', t')$. E, portanto, existe um primeiro relógio, que mede o tempo ao longo da recta \mathcal{O} , e um segundo relógio, que mede o tempo ao longo da recta \mathcal{P} . Ora, como já se viu anteriormente, a simultaneidade é um conceito relativo – não existe tal coisa como o que Newton designava por «tempo absoluto». Como podemos relacionar o tempo marcado pelo relógio \mathcal{O} com o tempo marcado pelo relógio \mathcal{P} ?

Figura 14

Nesta figura três acontecimentos (P_- , Q , P_+) pertencem exclusivamente ao relógio \mathcal{O} e apenas um acontecimento (A) ao relógio \mathcal{P} . O acontecimento origem $O(0,0)$ é o único acontecimento que pertence simultaneamente aos dois relógios/observadores. A pergunta que se coloca é a seguinte: como sincronizar os relógios \mathcal{O} e \mathcal{P} ?



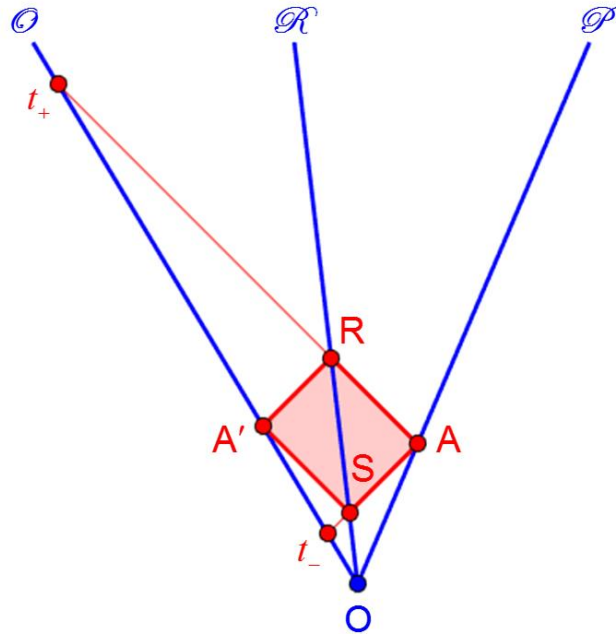
A resposta à pergunta colocada pela Fig. 14 é a seguinte: podemos sincronizar os dois relógios \mathcal{O} e \mathcal{P} através da introdução de um terceiro relógio \mathcal{R} , que designaremos por relógio árbitro (ou por relógio intermédio). Por definição, o árbitro \mathcal{R} é uma *equiloc* que, em qualquer instante, está a meio caminho entre as *equilocs* \mathcal{O} e \mathcal{P} . Mas, como saber se, efectivamente, o árbitro cumpre o requisito da sua própria definição? A resposta a esta pergunta é dada através da Fig. 15.

Notemos, desde já, o seguinte: a velocidade relativa entre os observadores (ou relógios) \mathcal{O} e \mathcal{P} é β , tal que

$$\beta = \frac{x_A}{t_A} = \frac{t_+ - t_-}{t_+ + t_-}.$$

Figura 15

Introduz-se um terceiro relógio \mathcal{R} (árbitro) para sincronizar os dois relógios \mathcal{O} e \mathcal{P} da Fig. 14. Este relógio (*equiloc*) está sempre a meio caminho entre os outros dois relógios.



Com efeito, podemos estabelecer que os relógios serão ideais e com mecanismos idênticos, se o tempo que o relógio \mathcal{O} marca no acontecimento A' (e que é τ') e o tempo que o relógio \mathcal{P} marca no acontecimento A (e que é τ) forem idênticos: $\tau' = \tau$. Porquê? Porque os sinais electromagnéticos emitidos no acontecimento $S \in \mathcal{R}$ (um em direcção a \mathcal{O} e reflectido em A' , de volta a \mathcal{R} ; outro em direcção a \mathcal{P} e reflectido em A , de volta a \mathcal{R}) são simultaneamente recebidos pelo relógio árbitro no mesmo acontecimento $R \in \mathcal{R}$. Ou seja: porque a velocidade da luz é uma constante $c = 1$ universal, fica definida uma *nova métrica* segundo a qual dois comprimentos de dois observadores distintos são decretados (pelo árbitro) como necessariamente iguais:

$$|\overline{OA'}| = |\overline{OA}| = \tau_A.$$

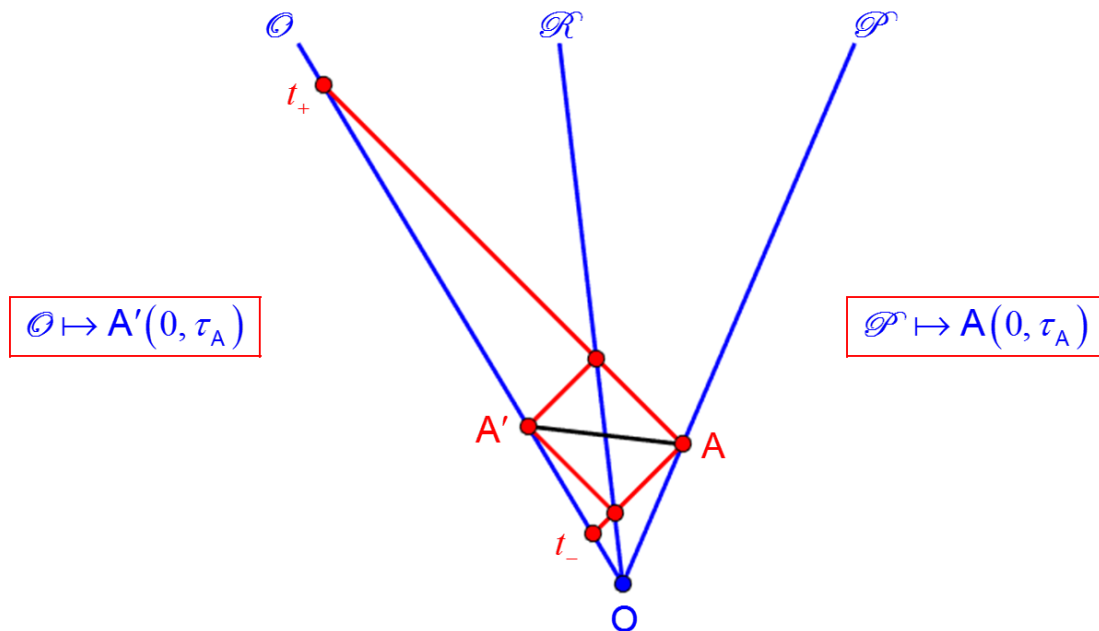
Com efeito, do ponto de vista do árbitro, os acontecimentos A e A' estão a igual «distância». E, além disso, as *equilocs* \mathcal{O} e \mathcal{P} afastam-se de \mathcal{R} com a mesma velocidade (embora em sentidos diametralmente opostos).

Mas note-se que esta igualdade não seria válida no plano euclidiano já que a circunferência centrada em O e raio \overline{OA} não passa (em geral) por A' .

Na Fig. 16 clarifica-se analiticamente a construção geométrica da Fig. 15.

Figura 16

Esta figura é a mesma que a Fig. 15. Mas, agora, vai-se proceder à introdução do chamado factor κ de Sir Hermann Bondi (1 de Novembro de 1919 – 10 de Setembro de 2005).



Como se viu anteriormente o relógio \mathcal{O} marca τ_A no acontecimento A' tal como o relógio \mathcal{P} (também) marca τ_A no acontecimento A . Consideremos o sinal electromagnético emitido por \mathcal{O} em t_- , reflectido por \mathcal{R} em S e recebido de volta por \mathcal{O} em A' . Seja τ_S o tempo que o relógio \mathcal{R} marca no acontecimento S . Podemos definir um factor $\kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R})$, tal que

$$\tau_S = \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) t_-.$$

Da mesma forma existirá um outro factor $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O})$, tal que

$$\tau_A = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \tau_S.$$

Portanto, infere-se que

$$\tau_A = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) t_-.$$

Consideremos, agora, o sinal electromagnético emitido por \mathcal{O} em τ_A , reflectido por \mathcal{R} em R e recebido de volta por \mathcal{O} em t_+ . Seja τ_R o tempo que o relógio \mathcal{R} marca no acontecimento R. Então, analogamente,

$$\tau_R = \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) \tau_A, \quad t_+ = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \tau_R,$$

donde

$$t_+ = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) \tau_A.$$

Logo, conclui-se que

$$\frac{t_+}{\tau_A} = \frac{\tau_A}{t_-} = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) \Rightarrow \boxed{\tau_A = \sqrt{t_+ t_-}}.$$

Ou seja: enquanto que t_A é a média aritmética de t_+ com t_- , τ_A é a média geométrica entre esses dois valores. Além disso, como $t_+ = t_A + x_A$ e $t_- = t_A - x_A$, resulta ainda que

$$\tau_A = \sqrt{t_A^2 - x_A^2} = t_A \sqrt{1 - \left(\frac{x_A}{t_A}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\tau_A = t_A \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

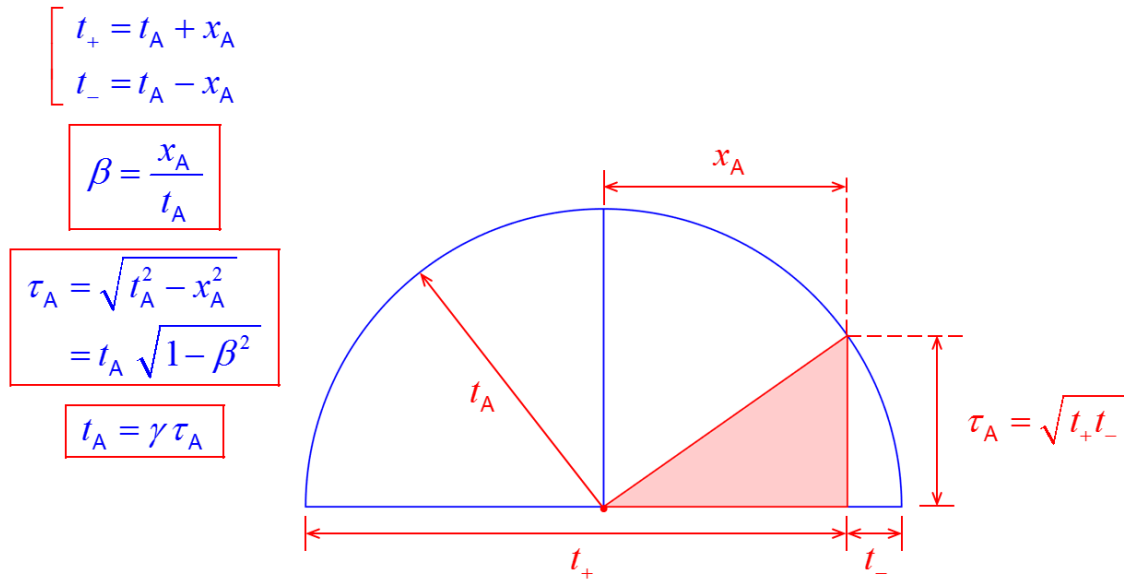
obtém-se a chamada dilatação do tempo:

$$\boxed{t_A = \gamma \tau_A \geq \tau_A}.$$

Na Fig. 17 mostra-se como se pode obter graficamente a média geométrica de dois comprimentos.

Figura 17

Nesta figura o raio da circunferência é o tempo que o relógio \mathcal{O} indica no acontecimento Q da Fig. 14. Este tempo é t_A que resulta da média aritmética de t_+ com t_- . Esta média aritmética é sempre superior (ou igual) à média geométrica τ_A de t_+ com t_- . Basta aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado nesta figura para determinar $\tau_A = \sqrt{t_A^2 - x_A^2} = t_A / \gamma$.



A Fig. 18 clarifica o que se entende em relatividade restrita por dilatação do tempo. Recorde-se, aqui, que o factor γ foi analisado na Fig. 10.

Figura 18

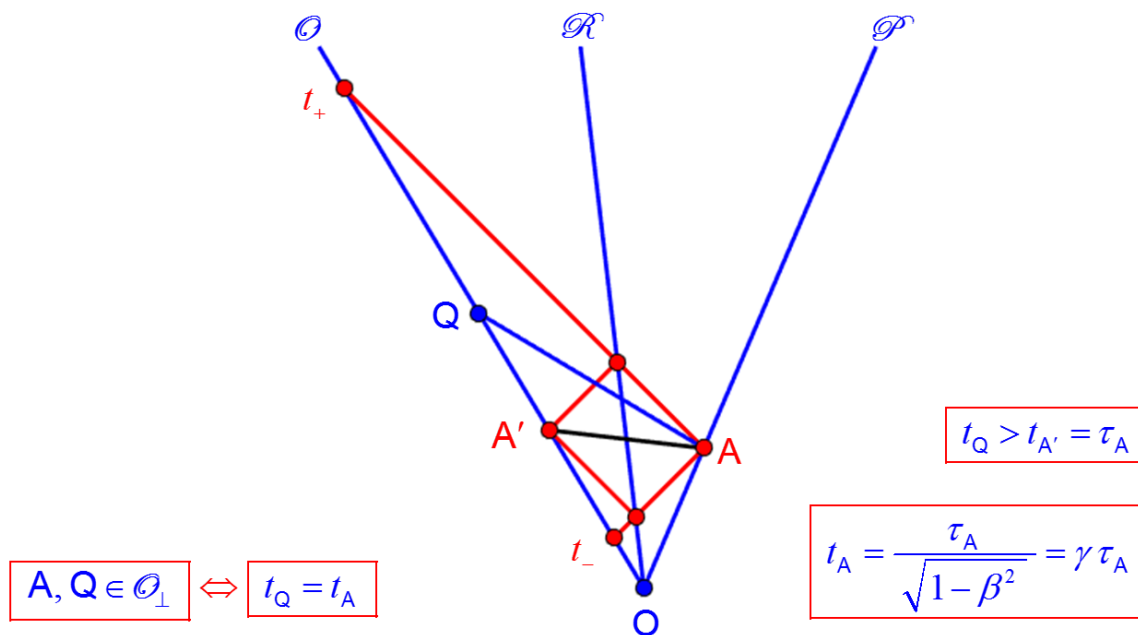
Nesta figura ilustra-se a dilatação do tempo. Como se viu nas Figs. 11—14, os acontecimentos A e Q são simultâneos do ponto de vista do observador \mathcal{O} cujo relógio marca

$$t_A = \frac{1}{2}(t_+ + t_-).$$

Porém, o acontecimento da *equiloc* \mathcal{O} que marca o mesmo tempo

$$\tau_A = \sqrt{t_+ t_-}$$

que o relógio \mathcal{P} (no acontecimento A) é, efectivamente, o acontecimento A' que é — como mostra a figura — claramente anterior a Q. Ou seja: quando o relógio \mathcal{O} marca t_A , o relógio \mathcal{P} marca um tempo τ_A menor que t_A ; o relógio em andamento \mathcal{P} atrasa-se em relação ao relógio estacionário \mathcal{O} .



A dilatação do tempo não é um efeito aparente – é um efeito real. Porém, como é possível a dilatação do tempo ser compatível com o princípio da relatividade? Com efeito: o relógio \mathcal{O} observa que o relógio \mathcal{P} está em movimento e, pela dilatação do tempo, \mathcal{P} atrasa-se em relação a \mathcal{O} . Mas, por outro lado, o relógio \mathcal{P} também observa que \mathcal{O} está em movimento e, pela (mesma) dilatação do tempo, \mathcal{O} atrasa-se em relação a \mathcal{P} . Logo, qual dos dois pontos de vistas está correcto? A resposta é a seguinte: a dilatação do tempo é recíproca – ambos os observadores (e, portanto, ambos os pontos de vista) estão correctos. A Fig. 19 ajuda a compreender como é isso possível.

Figura 19

A dilatação do tempo é um efeito real e recíproco. Os observadores \mathcal{O} e \mathcal{P} estão em movimento relativo. Como se viu (Figs. 16–18) é

$$\frac{\tau_A}{t_-} = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) = \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{P}).$$

Analogamente, ter-se-ia

$$\frac{t_+}{\tau_A} = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{P}) \kappa(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \kappa(\mathcal{P}, \mathcal{O}).$$

Logo, da igualdade

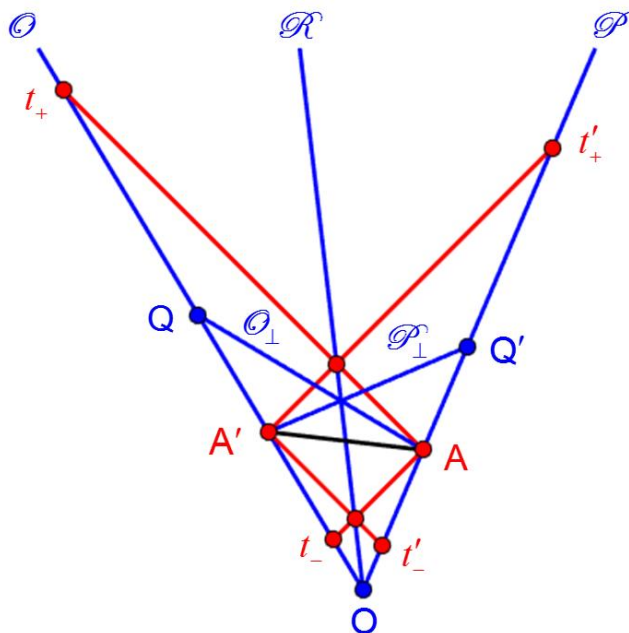
$$\frac{\tau_A}{t_-} = \frac{t_+}{\tau_A},$$

infere-se a igualdade

$$\kappa(\mathcal{O}, \mathcal{P}) = \kappa(\mathcal{P}, \mathcal{O}).$$

Para simplificar a notação façamos, doravante, $\kappa(\mathcal{O}, \mathcal{P}) = \kappa(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \kappa$. Obviamente, tem-se $\kappa(\mathcal{R}, \mathcal{O}) = \kappa(\mathcal{O}, \mathcal{R}) = \kappa(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \kappa(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \bar{\kappa}$, com $\bar{\kappa}^2 = \kappa$, i.e., $\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa}$. Assim, a velocidade relativa β de \mathcal{O} em relação a \mathcal{P} , será

$$\beta = \frac{x_A}{t_A} = \frac{t_+ - t_-}{t_+ + t_-} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1} \Rightarrow \boxed{\kappa = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}.$$



Os relógios \mathcal{O} e \mathcal{P} ambos indicam τ_A nos acontecimentos A' e A , respectivamente. Com efeito,

$$\beta = \frac{x'_A}{t'_A} = \frac{t'_+ - t'_-}{t'_+ + t'_-} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1} \Rightarrow \boxed{\kappa = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}.$$

Ou seja: na Fig. 19 tem-se $x'_A = x_A$, $t'_A = t_A$, $t'_+ = t_+$ e $t'_- = t_-$. Quando o relógio \mathcal{O} marca o tempo t_A no acontecimento Q , o observador \mathcal{O} verifica que o acontecimento Q é simultâneo com A e que, neste acontecimento, o relógio \mathcal{P} se atrasou pois marca $\tau_A = \sqrt{t_+ t_-} = \sqrt{t_A^2 - x_A^2} = t_A / \gamma < t_A$.

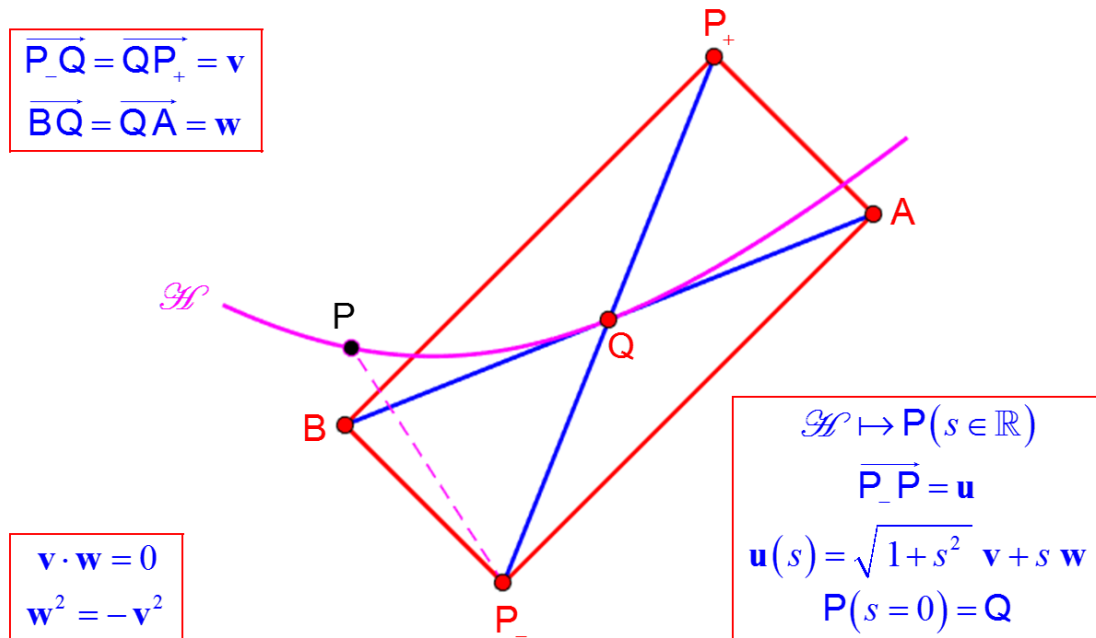
Reciprocamente, quando o relógio \mathcal{P} marca o tempo t_A no acontecimento Q' , o observador \mathcal{O} verifica que o acontecimento Q' é simultâneo com A' e que, neste acontecimento, o relógio \mathcal{O} se atrasou pois marca $\tau_A = \sqrt{t_+ t_-} = \sqrt{t_A^2 - x_A^2} = t_A / \gamma < t_A$. Não há qualquer contradição – a reciprocidade da dilatação do tempo é uma consequência lógica da relatividade da simultaneidade.

Vamos, agora, revelar de que forma o conceito de «distância» é revisto na teoria da relatividade restrita. No plano euclidiano o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância fixa de um dado ponto (centro) é uma circunferência. A Fig. 20 revela que, no plano hiperbólico, o lugar geométrico dos acontecimentos que se encontram a uma «distância» fixa de um dado acontecimento é uma hipérbole.

Na verdade, o nome «distância» entre acontecimentos deve ser interpretado como intervalo de espaço-tempo (e não, como no plano euclidiano, como uma mera distância espacial entre dois pontos do espaço).

Figura 20

Nesta figura considera-se, de novo, uma situação análoga à da Fig. 13.



Aqui, mais uma vez, um observador \mathcal{O} tem uma *equiloc* definida pela sequência de acontecimentos $P_-(0, t_-) \rightarrow Q(0, t_A) \rightarrow P_+(0, t_+)$. Os acontecimentos $A(x_A, t_A)$ e $B(-x_A, t_A)$ são simultâneos com

Q (sempre do ponto de vista de \mathcal{O}). Ou seja: a sequência de acontecimentos $B(-x_A, t_A) \rightarrow Q(0, t_A) \rightarrow A(x_A, t_A)$ define a *equitemp* \mathcal{O}_\perp . Esta figura responde, então, à seguinte pergunta: onde se encontram os acontecimentos $P(x, t)$ cuja distância (ou melhor: intervalo de espaço-tempo) em relação ao acontecimento $P_-(0, t_-)$ é sempre igual à distância (ou melhor: intervalo de espaço-tempo) entre $Q(0, t_A)$ e $P_-(0, t_-)$?

Para a dedução deste resultado iremos apenas considerar que o intervalo entre dois acontecimentos ao longo de um sinal electromagnético é nulo. De facto, o intervalo $\tau_A = \sqrt{t_+ t_-} = \sqrt{t_A^2 - x_A^2}$ torna-se nulo quando $x_A = t_A$ (já que, neste caso, se teria $t_+ = t_A + x_A = 2t_A$ e $t_- = t_A - x_A = 0$). Note-se que isto corresponderia a fazer $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\perp$ na Fig. 20.

Definamos, então, os seguintes vectores:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \overline{P_- Q} \\ \mathbf{w} = \overline{Q A} \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{v} + \mathbf{w} = \overline{P_- A}, \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} = \overline{P_- B}. \end{cases}$$

Como revela a Fig. 20, os novos vectores $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ são lados do rectângulo luminoso da Fig. 20. Mas então a respectiva distância (ou melhor: intervalo) é tal que

$$\begin{cases} (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = |\overline{P_- A}|^2 = 0, \\ (\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 = |\overline{P_- B}|^2 = 0. \end{cases}$$

Ora, por outro lado, tem-se

$$\begin{cases} (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v}^2 + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w}^2 = 0 \\ (\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{v}^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w}^2 = 0 \end{cases}$$

donde, adicionando e subtraindo ordenadamente, vem

$$\begin{cases} (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 + (\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 = 2\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{w}^2 = 0 \\ (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 = 4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \mathbf{w}^2 = -\mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{matrix}}.$$

Seja, agora,

$$\mathbf{u} = \overline{P_- P} = f(s) \mathbf{v} + s \mathbf{w},$$

onde $s \in \mathbb{R}$. A pergunta atrás colocada tem, então, a seguinte formulação algébrica:

$$\mathbf{u}^2 = |\overline{P_- P}|^2 = [f(s) \mathbf{v} + s \mathbf{w}]^2 = f^2(s) \mathbf{v}^2 + 2s f(s) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + s^2 \mathbf{w}^2 = \mathbf{v}^2.$$

Portanto, infere-se que

$$f^2(s) \mathbf{v}^2 - s^2 \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^2 \Rightarrow f^2(s) = 1 + s^2 \Rightarrow f(s) = \sqrt{1 + s^2} .$$

Em conclusão, obtém-se

$$\mathbf{u}(s) = \overline{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{P}} = \sqrt{1 + s^2} \mathbf{v} + s \mathbf{w}, \quad \mathbf{u}^2(s) = \mathbf{v}^2 .$$

O lugar geométrico descrito pelos vectores $\mathbf{u}(s)$, quando $-\infty < s < \infty$, é a hipérbole \mathcal{H} desenhada na Fig. 20 e que passa pelo acontecimento $\mathbf{Q}(0, t_A)$. Todos os acontecimentos $\mathbf{P}(x, t) \in \mathcal{H}$ têm o mesmo intervalo em relação ao acontecimento $\mathbf{P}_-(0, t_-)$ que o acontecimento $\mathbf{Q}(0, t_A)$. Aliás o acontecimento $\mathbf{Q}(0, t_A)$ corresponde a fazer $s = 0$ na equação de \mathcal{H} .

A tangente à hipérbole no acontecimento $\mathbf{Q}(0, t_A)$ é ortogonal ao vector $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{Q}}$. Com efeito, tem-se

$$\mathbf{u}^2(s) = \mathbf{v}^2 \Rightarrow 2\mathbf{u}(s) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}(s=0) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} \Big|_{s=0} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

em que

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{u}}{ds}$$

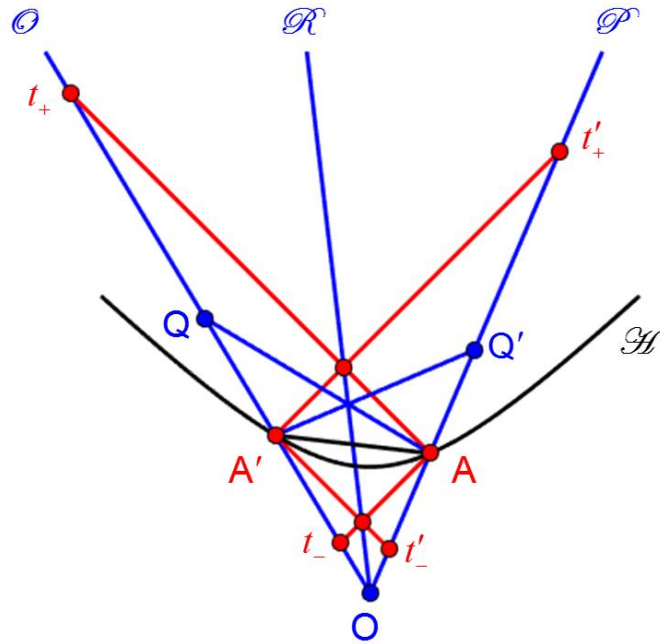
representa o vector tangente à curva (hipérbole) para um certo valor do parâmetro real s .

Na Fig. 21 introduz-se a hipérbole de calibração em relação à Fig. 19 onde se analisou a reciprocidade da dilatação do tempo.

Figura 21

Esta figura repete a Fig. 19, mas introduzindo a hipérbole de calibração que passa pelos acontecimentos \mathbf{A}' e \mathbf{A} .

Note-se que também se poderiam ter introduzido outras três hipérbolas (não se introduziram estas hipérbolas adicionais para não sobrecarregar a figura), a saber: (i) através de t_+ e t'_+ ; (ii) através de \mathbf{Q} e \mathbf{Q}' ; (iii) através de t_- e t'_- .



Existe, assim, uma lição fundamental a reter: a geometria do espaço-tempo da relatividade restrita não é euclidiana. O conceito de paralelismo é um conceito afim – independente da métrica. Porém, o conceito de ortogonalidade depende criticamente da métrica considerada: ortogonalidade no plano hiperbólico assume uma natureza completamente distinta da ortogonalidade no plano euclidiano.

Tanto o plano euclidiano como o plano hiperbólico radicam no mesmo espaço vectorial: o espaço linear bi-dimensional \mathbb{R}^2 . Recordemos a definição:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ y \in \mathbb{R} \}.$$

Este espaço vectorial está definido sobre o corpo \mathbb{R} , i.e., os escalares são números reais. A métrica só aparece quando se define um produto interno que, por sua vez, resulta da definição de uma forma quadrática. Um espaço vectorial equipado com uma forma quadrática torna-se num espaço quadrático. E é enquanto espaços quadráticos que o plano euclidiano (usualmente representado por $\mathbb{R}^{2,0}$) é profundamente distinto do plano hiperbólico (usualmente representado por $\mathbb{R}^{1,1}$).

Seja $\mathbf{v} = (x, y)$ um vector do espaço vectorial \mathbb{R}^2 . Uma forma quadrática neste espaço é uma aplicação $\mathcal{Q}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{Q}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda^2 \mathcal{Q}(\mathbf{v}).$$

No caso euclidiano, faz-se

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, y) = x^2 + y^2.$$

No caso hiperbólico, faz-se

$$\mathbf{v} = (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, t) = t^2 - x^2.$$

No caso euclidiano o conceito de distância \mathcal{D} resulta de

$$\mathcal{D}^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \mapsto \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

pelo que a distância euclidiana é

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

No caso hiperbólico não se define distância. Define-se, em alternativa, um intervalo (de espaço-tempo) \mathcal{I} , tal que

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

que corresponde a

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x_1, t_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v}_2 = (x_2, t_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \mapsto \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (x_1 - x_2, t_1 - t_2) \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2,$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2.$$

A primeira diferença fundamental é que a forma quadrática euclidiana é *anisotrópica*, i.e., tem-se

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, y) = x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Ou seja: só ao vector nulo, com $\mathbf{v} = 0$, corresponde uma forma quadrática nula.

Por sua vez, a forma quadrática hiperbólica é *isotrópica*, i.e., tem-se

$$\exists (\mathbf{v} \neq 0) \mid \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = 0.$$

Ou seja: existem vectores $\mathbf{v} \neq 0$ aos quais correspondem forma quadráticas nulas. Nomeadamente, para sinais electromagnéticos tem-se a equação $t = \alpha \pm x$ no plano (x, t) , em que α é uma dada constante (número real). Logo, neste caso, o intervalo entre dois acontecimentos situados sobre um mesmo sinal electromagnético (i.e., que satisfazem ambos essa equação) é

$$\begin{cases} t_1 = \alpha \pm x_1 \\ t_2 = \alpha \pm x_2 \end{cases} \mapsto (t_1 - t_2)^2 = (\pm x_1 \mp x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\therefore \mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Coloca-se, portanto, a questão: o que é um produto interno? Esta questão tem uma resposta conhecida na métrica euclidiana, mas desconhecida na (nova) métrica da relatividade restrita. Começemos pela definição de produto interno baseada na definição de forma quadrática.

Um produto interno resulta de uma forma bilinear \mathcal{B} : sendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, define-se o produto interno $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ como sendo o número real (não necessariamente positivo)

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathcal{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathcal{Q}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{Q}(\mathbf{v}_2)].$$

No caso euclidiano, obtém-se o resultado conhecido

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)] \\ = x_1x_2 + y_1y_2, \end{cases}$$

enquanto que, no caso hiperbólico, vem (o resultado matematicamente novo, que expressa a nova física da relatividade restrita)

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x_1, t_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v}_2 = (x_2, t_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} [(t_1 + t_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 - (t_1^2 - x_1^2) - (t_2^2 - x_2^2)] \\ = t_1t_2 - x_1x_2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{relatividade restrita}} \mapsto \boxed{\text{plano hiperbólico}} \mapsto \boxed{\text{métrica lorentziana}} \mapsto \boxed{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, t_2) = t_1t_2 - x_1x_2}$$

No caso, atrás analisado, de dois acontecimentos de um mesmo sinal electromagnético, vem então

$$\begin{cases} t_1 = \alpha \pm x_1 \\ t_2 = \alpha \pm x_2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{v}_1 = (x_1, \alpha \pm x_1) \\ \mathbf{v}_2 = (x_2, \alpha \pm x_2) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = t_1t_2 - x_1x_2 \\ = (\alpha \pm x_1)(\alpha \pm x_2) - x_1x_2 \\ = \alpha [\alpha \pm (x_1 + x_2)]. \end{cases}$$

A forma quadrática $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, t) = t^2 - x^2$ impõe a classificação dos vectores do plano hiperbólico em três categorias:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, t) = t^2 - x^2 < 0 \mapsto \mathbf{v} \text{ é um vector do tipo espaço,} \\ \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, t) = t^2 - x^2 = 0 \mapsto \mathbf{v} \text{ é um vector do tipo luz,} \\ \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x, t) = t^2 - x^2 > 0 \mapsto \mathbf{v} \text{ é um vector do tipo tempo.} \end{cases}$$

Num vector do tipo espaço tem-se $t = \beta x$, com $\beta < 1$. Num vector do tipo tempo tem-se $x = t$. Num vector do tipo tempo tem-se $x = \beta t$, com $\beta < 1$.

Uma base canónica do espaço hiperbólico é usualmente designada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 = (0, 1) \\ \mathbf{e}_1 = (1, 0) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_0) = 1 \\ \mathbf{e}_1^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_1) = -1 \end{bmatrix} \mapsto \boxed{\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}} \mapsto \boxed{\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0}.$$

Em geral um vector do tipo espaço tem a forma $\mathbf{v}_s = (x, t) = (x, \beta x)$, com $\beta < 1$ e $x \neq 0$, a que corresponde $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_s) = (\beta^2 - 1)x^2 = -(x/\gamma)^2 < 0$. Num vector do tipo tempo, por sua vez, tem-se $\mathbf{v}_t = (x, t) = (\beta t, t)$, com $\beta < 1$ e $t \neq 0$, a que corresponde $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_t) = (1 - \beta^2)t^2 = (t/\gamma)^2 > 0$.

Os vectores \mathbf{e}_0 e \mathbf{e}_1 da base canónica \mathcal{B}_c são vectores unitários pois $|\mathcal{Q}(\mathbf{e}_0)| = |\mathcal{Q}(\mathbf{e}_1)| = 1$. Existem, porém, outros vectores unitários e ortogonais entre si que também constituem uma base do plano hiperbólico. Com efeito, façamos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 = (\sinh(\phi), \cosh(\phi)) \\ \mathbf{f}_1 = (\cosh(\phi), \sinh(\phi)) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{f}_0) = \cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1 \\ \mathbf{f}_1^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{f}_1) = \sinh^2(\phi) - \cosh^2(\phi) = -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{B}_\phi = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}} \mapsto \boxed{\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_1 = \cosh(\phi) \sinh(\phi) - \sinh(\phi) \cosh(\phi)}.$$

Note-se que

$$\mathcal{B}_\phi(\phi = 0) \rightarrow \mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}.$$

Mais adiante faz-se uma interpretação geométrica, num diagrama de Minkowski, destas bases.

4. A transformação de Lorentz e a métrica lorentziana

A transformação de Lorentz é, do ponto de vista da construção de uma intuição físico-geométrica, um resultado acessório em relatividade restrita. O que é essencial é discutir o conceito de simultaneidade: de que forma o segundo postulado (sobre a invariância da velocidade da luz no vácuo) impõe a relatividade do conceito de simultaneidade.

A dilatação do tempo e a contracção do espaço são apenas manifestações (i.e., aplicações) da revisão do conceito de simultaneidade. Para a desconstrução dos conceitos erróneos de tempo absoluto e de simultaneidade absoluta, a interpretação geométrica – associada a diagramas de Minkowski – desempenha um papel fundamental.

Do ponto de vista da interacção entre álgebra e geometria segue-se, em relatividade restrita, um segundo aspecto (também) fundamental: o reconhecimento de que tudo aquilo que (aparentemente) choca com a nossa intuição (newtoniana e euclidiana) se deve a uma nova métrica. A nova métrica é designada por métrica lorentziana e diverge profundamente da (vulgar) métrica euclidiana – donde resulta a nossa intuição geométrica de distância (euclidiana).

Que fique claro, no entanto, o seguinte: está-se a considerar uma simplificação do espaço-tempo, reduzindo-o a um espaço quadrático bi-dimensional. Nesta simplificação apenas se considera uma única dimensão espacial, identificando o nosso modelo de espaço-tempo com o plano hiperbólico $\mathbb{R}^{1,1}$. Porém, quando se estuda *todo* o espaço-tempo (i.e., sem esta simplificação) temos (necessariamente) de começar por considerar um espaço vectorial \mathbb{R}^4 e, de seguida, equipar este espaço com uma forma quadrática (tornando-o, eventualmente, no espaço quadrático $\mathbb{R}^{1,3}$). Neste caso, a parte espacial (tridimensional) desse espaço-tempo (quadridimensional) continua a ter uma sub-métrica euclidiana, por exemplo (no caso de $\mathbb{R}^{1,3}$) através de

$$\mathcal{Q}(x, y, z, t) = t^2 - \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\text{sub-métrica euclidiana}}.$$

métrica lorentziana

A demonstração que, nesta secção, se vai fazer da transformação de Lorentz tem, apenas, um objectivo instrumental: introduzir, sem grandes desvios, a invariância do intervalo (de espaço-tempo). Deve notar-se que se poderia deduzir a invariância do intervalo sem se recorrer à transformação de Lorentz. Com efeito, na literatura é até mais frequente o caminho inverso: deduzir a transformação de Lorentz a partir da invariância do intervalo. Porém, nesta secção aproveita-se a introdução, feita na secção anterior, do factor κ de Bondi (ver a discussão associada à Fig. 16).

A Fig. 9 apresenta um diagrama de Minkowski. Este diagrama foi introduzido sem qualquer recurso à transformação de Lorentz – é essencial que se entenda isso. Na sua construção aparecem dois conceitos fundamentais e que se estudaram, com algum pormenor: *equilocs* e *equitemps*.

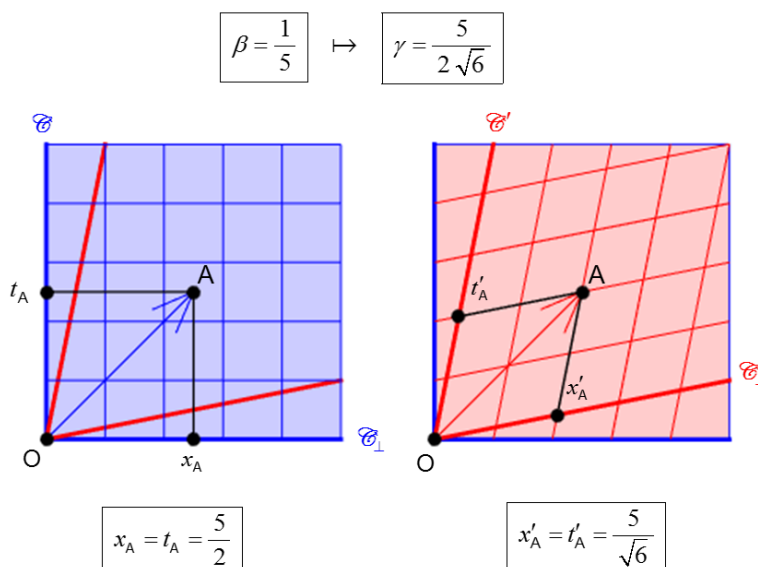
O facto de dois observadores distintos \mathcal{O} e \mathcal{P} (ou, se se preferir, dois relógios correspondentes \mathcal{C} e \mathcal{C}') serem duas *equilocs* que se intersectam num dado acontecimento O , denominado origem (em que, portanto, se faz $x = x' = 0$ e $t = t' = 0$), é trivial. De facto, o mesmo já acontecia no diagrama de espaço-tempo que ilustra a transformação de Galileu – tal como se viu na Fig. 4.

O que realmente distingue a Fig. 4 da Fig. 9, fazendo com isso toda a diferença, é o seguinte: na relatividade restrita as *equitemps* \mathcal{O}_\perp e \mathcal{P}_\perp dos observadores \mathcal{O} e \mathcal{P} (ou dos respectivos relógios \mathcal{C} e \mathcal{C}' , caso em que é preferível designar as correspondentes *equitemps* por \mathcal{C}_\perp e \mathcal{C}'_\perp) *não são paralelas*. Ou seja: na Fig. 4 o eixo x coincide com o eixo x' ; na Fig. 9 existe um ângulo entre os eixos x e x' (que é igual ao ângulo entre os eixos t e t'). A seguinte Fig. 22 realça este aspecto.

Figura 22

Nesta figura apresenta-se um diagrama de Minkowski onde se desenharam diversas *equitemps* e *equilocs* de dois pontos de vista:

- Primeiro, do lado esquerdo, em relação ao referencial $S \mapsto (x, t)$ correspondente ao observador \mathcal{O} ou ao relógio \mathcal{C} ;
- Segundo, do lado direito, em relação ao referencial $S' \mapsto (x', t')$ correspondente ao observador \mathcal{P} ou ao relógio \mathcal{C}' .



O intervalo entre o acontecimento origem (aqui & agora) $O(0,0)$ e o acontecimento A é um invariante: tem-se (no caso especial representado na Fig. 22)

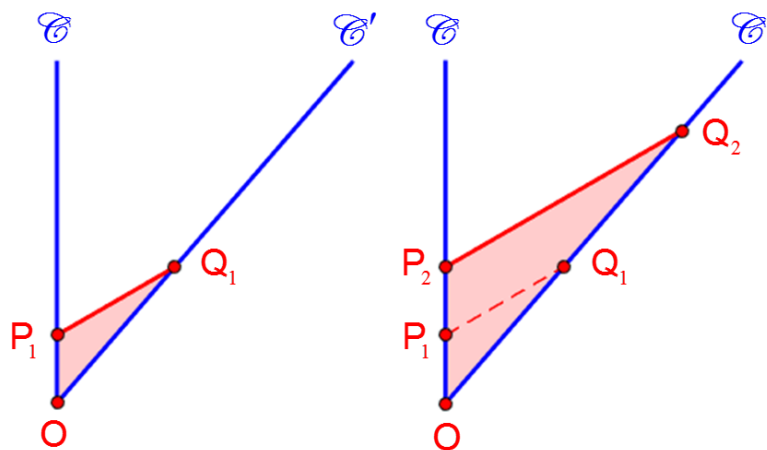
$$\mathcal{I} = t_A^2 - x_A^2 = (t'_A)^2 - (x'_A)^2 = 0 .$$

Trata-se, efectivamente, de um intervalo de tipo luz: o vector $\mathbf{v} = A - O = \overline{OA}$ é um sinal electromagnético: este sinal tem uma inclinação de 45° em relação ao eixo temporal \mathcal{C} do sistema $S \mapsto (x, t)$ e, consequentemente, também em relação ao eixo espacial \mathcal{C}_1 do mesmo sistema de coordenadas (a que podemos chamar o referencial do laboratório).

Comecemos por recordar, de seguida, a definição do factor κ de Bondi. Consideremos, para o efeito, a Fig. 23.

Figura 23

Um primeiro sinal electromagnético é emitido, em relação ao relógio \mathcal{C} , no acontecimento P_1 (instante t_1). Esse sinal é recebido, no acontecimento Q_1 , por um segundo observador que transporta um novo relógio \mathcal{C}' e que marca, nesse acontecimento, o tempo (próprio) τ_1 . Um segundo sinal electromagnético é emitido, novamente em relação ao relógio \mathcal{C} , no acontecimento P_2 no instante t_2 . Este segundo sinal é recebido, em \mathcal{C}' , no instante τ_2 . Os dois relógios \mathcal{C} e \mathcal{C}' afastam-se com uma velocidade (relativa) constante β .



As duas partes (esquerda e direita) da Fig. 23 mostram claramente que o triângulo OP_1Q_1 é semelhante ao triângulo OP_2Q_2 . Assim, se $\overline{OQ_1} = \tau_1 = \kappa \overline{OP_1} = \kappa t_1$, é necessariamente $\overline{OQ_2} = \tau_2 = \kappa \overline{OP_2} = \kappa t_2$. Ou seja,

$$\kappa = \frac{\tau_1}{t_1} = \frac{\tau_2}{t_2}.$$

O coeficiente κ (de Bondi) apenas depende de β . Facilmente se mostra que se tem (ver a discussão associada à Fig. 19)

$$\kappa = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

É costume associar o factor κ a um novo parâmetro ϕ (denominado por *rapidez* ou *celeridade*), tal que

$$\kappa = e^\phi = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \phi = \ln(\kappa) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Notemos, desde já, que se tem (este resultado será utilizado, mais adiante, na dedução da transformação de Lorentz)

$$\frac{1}{\kappa} = e^{-\phi} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \begin{cases} \kappa + \frac{1}{\kappa} = e^\phi + e^{-\phi} = 2 \cosh(\phi) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\gamma, \\ \kappa - \frac{1}{\kappa} = e^\phi - e^{-\phi} = 2 \sinh(\phi) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\gamma\beta. \end{cases}$$

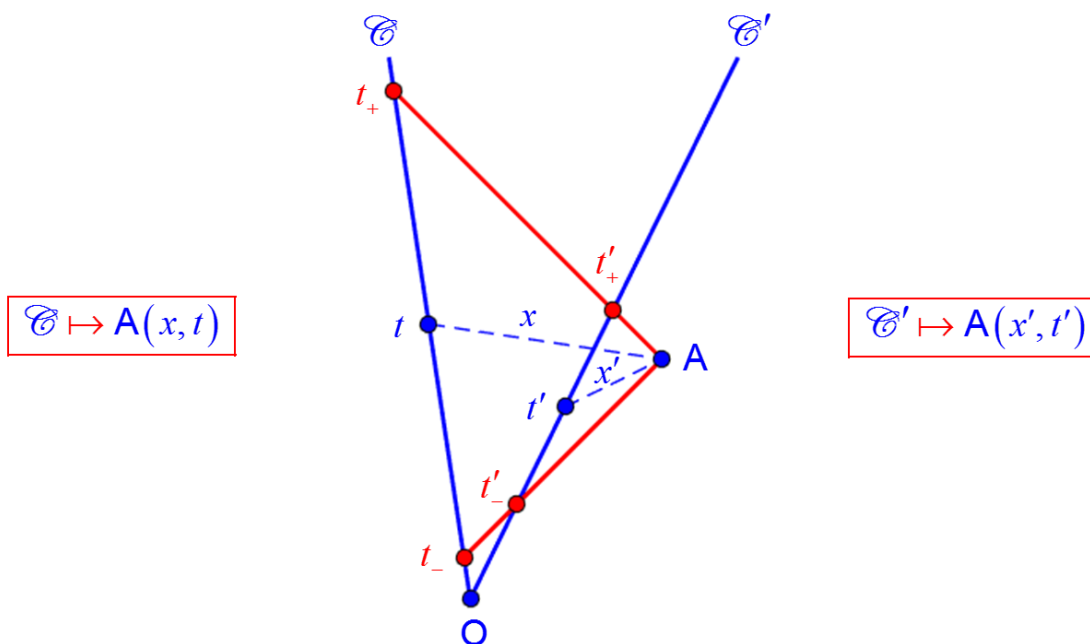
Sublinhe-se, também, que o facto de se ter desenhado (na Fig. 23) a linha de universo do relógio \mathcal{C} como sendo vertical não é relevante. O factor κ de Bondi seria o mesmo quando se considera o caso geral da linha de universo de \mathcal{C} com uma inclinação diversa – tal como se fez sempre na secção anterior (e, nomeadamente, na Fig. 19). Por essa razão a próxima figura – para realçar esse facto – retoma essa configuração geral.

Porém, antes de continuar, sublinhe-se que – com a introdução da rapidez ϕ – tem-se:

$$\begin{cases} \gamma = \cosh(\phi) = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^{-1}) \\ \gamma\beta = \sinh(\phi) = \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^{-1}) \end{cases} \mapsto \beta = \tanh(\phi) = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}.$$

Figura 24

Nesta nova figura, um mesmo acontecimento A é registado por dois observadores diferentes. De acordo com um primeiro observador, denominado \mathcal{C} , verifica-se que $A \mapsto (x, t)$. Porém, de acordo com um segundo observador, denominado \mathcal{C}' , verifica-se que $A \mapsto (x', t')$. A transformação de Lorentz é a transformação (linear) que relaciona as coordenadas (x', t') com as coordenadas (x, t) .



Para a determinação das coordenadas de cada observador/relógio, faz-se o mesmo tipo de experiência que já se tinha feito nas Figs. 11 – 21 da secção anterior. A única diferença é que, agora, se dispensou a intermediação de um terceiro observador \mathcal{R} (o *referee* ou árbitro) pois já se conhece a relação entre κ e β . Como se tem vindo a salientar, usa-se uma linguagem permutável, no sentido em que se faz a identificação

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{O} \Leftrightarrow \text{Eixo } t \text{ do sistema de coordenadas inercial } S \mapsto (x, t) \\ \mathcal{C}' \Leftrightarrow \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Eixo } t' \text{ do sistema de coordenadas inercial } S' \mapsto (x', t') \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{C}_\perp \Leftrightarrow \mathcal{O}_\perp \Leftrightarrow \text{Eixo } x \text{ do sistema de coordenadas inercial } S \mapsto (x, t) \\ \mathcal{C}'_\perp \Leftrightarrow \mathcal{P}_\perp \Leftrightarrow \text{Eixo } x' \text{ do sistema de coordenadas inercial } S' \mapsto (x', t') \end{array} \right\}$$

de forma a sublinhar que um eixo temporal é uma *equiloc* e que um eixo espacial é uma *equitemp*. Na Fig. 24 não se representaram os eixos espaciais para não sobrecarregar desnecessariamente a

construção da figura. De qualquer forma, representam-se a tracejado duas *equitemps* (uma para cada observador inercial).

O essencial é que existem, em cada relógio (\mathcal{C} e \mathcal{C}'), dois instantes a registar: um instante de emissão (instante t_- em \mathcal{C} e instante t'_- em \mathcal{C}') e um instante de recepção (instante t_+ em \mathcal{C} e instante t'_+ em \mathcal{C}'). Note-se que se fez coincidir t'_- com a passagem (por \mathcal{C}') do sinal proveniente de \mathcal{C} em direcção a A e t'_+ com a passagem (por \mathcal{C}') do sinal proveniente de A em direcção a \mathcal{C} . Podemos imaginar que o sinal de ida-e-volta emitido (e recebido) por \mathcal{C} tem uma frequência diferente do sinal de ida-e-volta emitido (e recebido) por \mathcal{C}' , de forma a evitar qualquer confusão entre os dois (e, claro está, entrando com as correcções devidas ao efeito Doppler).

A transformação de Lorentz resulta, de forma imediata, de escrever

$$\begin{cases} t_- = t - x \\ t_+ = t + x \end{cases} \quad \begin{cases} t'_- = t' - x' \\ t'_+ = t' + x' \end{cases}$$

e, ainda,

$$\begin{cases} t'_- = \kappa t_- \\ t'_+ = \kappa t'_+ \end{cases}$$

de modo que se tem

$$\begin{cases} t' - x' = \kappa(t - x) \\ t + x = \kappa(t' + x') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' + x' = \frac{1}{\kappa}(t + x) \\ t' - x' = \kappa(t - x) \end{cases}.$$

Este sistema de duas equações transporta uma dupla informação.

- A primeira conclusão obtém-se por multiplicação ordenada das duas equações:

$$(t' + x')(t' - x') = (t + x)(t - x).$$

Ou seja:

$$(t')^2 - (x')^2 = t^2 - x^2.$$

Este resultado é o mais importante pois mostra a *invariância do intervalo* e, consequentemente, estabelece a *métrica lorentziana*.

- A segunda conclusão – a *transformação de Lorentz* – obtém-se por adição e subtracção ordenadas das duas equações:

$$\begin{cases} 2t' = \left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right)t - \left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right)x = 2 \cosh(\phi)t - 2 \sinh(\phi)x = 2\gamma t - 2\gamma\beta x, \\ 2x' = \left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right)x - \left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right)t = 2 \cosh(\phi)x - 2 \sinh(\phi)t = 2\gamma x - 2\gamma\beta t. \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta t) \end{cases}.$$

Comecemos por reescrever estes dois resultados em unidades não geométricas – mais precisamente em unidades SI.

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{Unidades}} \\ \boxed{\text{SI}} \end{array} \mapsto \begin{cases} \text{Invariância do intervalo} & \mapsto \boxed{c^2 t^2 - x^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2} \\ \text{Transformação de Lorentz} & \mapsto \begin{cases} \boxed{ct' = \gamma(ct - \beta x)} \\ \boxed{x' = \gamma(x - \beta ct)} \end{cases} \end{cases}$$

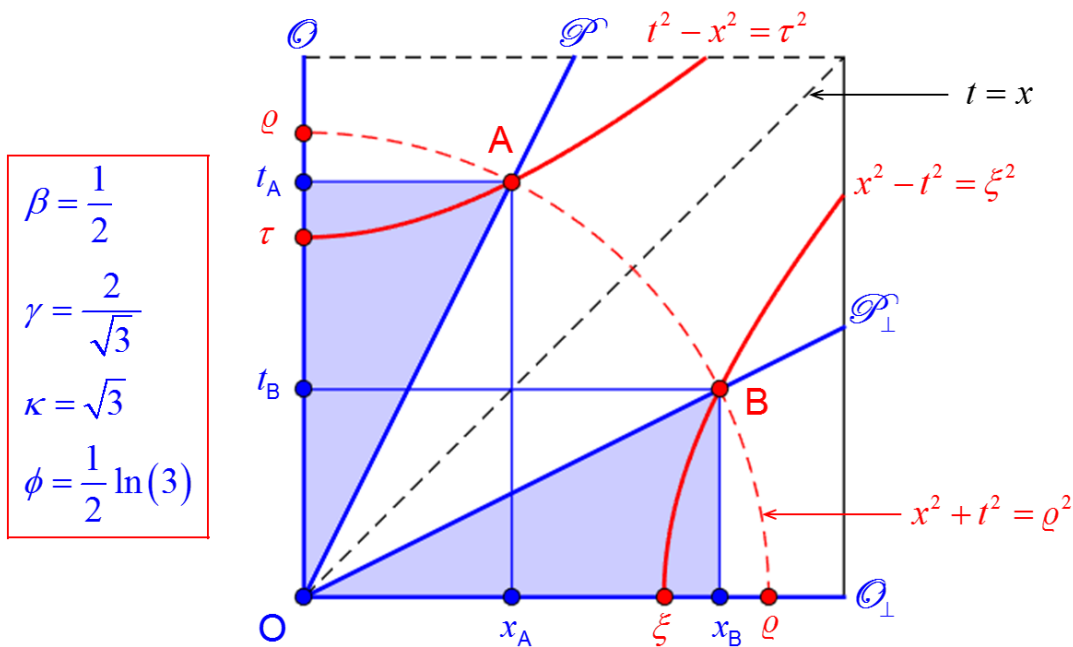
Note-se que, para passar a unidades SI, basta substituir t e t' por ct e ct' , respectivamente. Porém, estamos interessados numa perspectiva geométrica – daí a nossa opção por utilizar unidades geométricas (e.g., o tempo é medido em segundos, o espaço é medido em segundos-luz e as velocidades são adimensionais, com $c = 1$).

Na Fig. 25 esclarece-se qual é a consequência prática da métrica lorentziana: não se pode interpretar a distância física (intervalo) num diagrama de Minkowski com base na nossa intuição euclidiana de distância.

Figura 25

Esta figura descreve a nova métrica não euclidiana do plano hiperbólico da relatividade restrita. Consideram-se dois observadores: (i) um observador \mathcal{O} , a que corresponde o sistema de coordenadas $S \mapsto (x, t)$, em que se designa o eixo t por \mathcal{O} e o eixo x por \mathcal{O}_\perp ; (ii) um observador \mathcal{P} , a que corresponde o sistema de coordenadas $S' \mapsto (x', t')$, em que se designa o eixo t' por \mathcal{P} e o eixo x' por \mathcal{P}_\perp . A hipérbole \mathcal{H}_τ de equação $t^2 - x^2 = \tau^2$ corresponde ao lugar geométrico dos acontecimentos $A(x, t)$ em que o intervalo entre os acontecimentos A e $O(0, 0)$ é $\mathcal{I} = \tau^2$. A hipérbole \mathcal{H}_ξ de equação $x^2 - t^2 = \xi^2$ corresponde ao lugar geométrico dos acontecimentos $B(x, t)$ em que o intervalo entre os acontecimentos B e $O(0, 0)$ é $\mathcal{I} = -\xi^2$. Fez-se, nesta figura, $\tau = \xi$ tendo-se, ainda, considerado $\beta = 0.5$. Para comparação aparece (a tracejado) a circunferência que é

o lugar geométrico dos pontos $P(x,t)$ cuja distância (euclidiana) em relação a $O(0,0)$ é $\mathcal{D} = \varrho$. Os acontecimentos cujo intervalo em relação a $O(0,0)$ é $\mathcal{I} = 0$ encontram-se sobre a recta $t = x$.



Sejam dados dois acontecimentos $E_1(x_1, t_1)$ e $E_2(x_2, t_2)$. O intervalo entre eles é definido por

$$\mathcal{I}(E_1, E_2) = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2.$$

Podemos, então, definir a *medida* deste intervalo como sendo

$$\mu(E_1, E_2) = \sqrt{|(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2|}.$$

Assim, na Fig. 25, a medida correspondente à hipérbole \mathcal{H}_τ de equação $t^2 - x^2 = \tau^2$ é $\mu = \tau$ enquanto que, à hipérbole \mathcal{H}_ξ de equação $x^2 - t^2 = \xi^2$, corresponde a medida $\mu = \xi$. O conceito de medida é, portanto, um conceito do plano hiperbólico que corresponde ao conceito de distância do plano euclidiano. Ainda em relação à Fig. 26, a distância euclidiana entre $O(0,0)$ e $A(x_A, t_A)$ é dada por

$$\mathcal{D} = \sqrt{t_A^2 + x_A^2} = \varrho.$$

Notando que, na realidade, se tem (do ponto de vista de \mathcal{O}) $A \mapsto (x_A, t_A) = (\beta, 1)t_A$, infere-se que

$$\mathcal{D} = \sqrt{t_A^2 + x_A^2} = t_A \sqrt{1 + \beta^2} = \varrho.$$

Por outro lado, tem-se (também do ponto de vista de \mathcal{O}) $\mathbf{B} \mapsto (x_B, t_B) = (1, \beta) x_B$. Logo, como se fez (na Fig. 25) $t_A = x_B$, é ainda

$$\mathcal{D} = \sqrt{t_B^2 + x_B^2} = x_B \sqrt{1 + \beta^2} = \varrho.$$

Com efeito, a *equiloc* \mathcal{P} corresponde (do ponto de vista de \mathcal{O}) á recta de equação $x = \beta t$ e a *equitemp* \mathcal{P}_\perp corresponde (também do ponto de vista de \mathcal{O}) à recta de equação $t = \beta x$. Mas então,

$$\mu = \tau = \sqrt{t_A^2 - x_A^2} = t_A \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{t_A}{\gamma} = \varrho \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}.$$

Portanto, também,

$$\mu = \xi = \sqrt{x_B^2 - t_B^2} = x_B \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{x_B}{\gamma} = \varrho \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}.$$

Assim, em geral, tem-se

$$\boxed{\frac{\mu}{\varrho} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}},$$

em que μ é a medida do intervalo (métrica lorentziana) e ϱ a distância (métrica euclidiana). Note-se que, só quando se tem $\beta = 0$ (caso em que \mathcal{P} coincide com \mathcal{O}) é que a distância euclidiana coincide com a medida do intervalo: $\mu = \tau = \xi = \varrho$. Quando, por outro lado, $\beta \rightarrow 1$ obtém-se $\mu \rightarrow 0$ (mesmo quando $\varrho \neq 0$).

Do ponto de vista físico, podemos constatar o seguinte:

- Quando um relógio mede o intervalo de tempo τ ao longo da *equiloc* \mathcal{P} , o observador \mathcal{O} mede, efectivamente, um intervalo de tempo $t_A = \gamma \tau > \tau$ (este efeito é a *dilatação do tempo* da relatividade restrita).
- Quando uma régua de comprimento x_B , em repouso em relação a \mathcal{O} , é medida ao longo da *equitemp* \mathcal{P}_\perp pelo observador \mathcal{P} , este mede, efectivamente, um comprimento $\xi = x_B / \gamma < x_B$ (este efeito é a *contração do espaço* da relatividade restrita).

O nome de teoria da relatividade (restrita) vem do facto de se ter inferido – a partir da invariância da velocidade da luz – que o tempo não era absoluto. O tempo depende do observador inercial que o mede. Significa isso que a relatividade vem afirmar que – ao contrário da física newtoniana – tudo é

relativo? De forma nenhuma: existe uma relatividade do espaço e uma relatividade do tempo; mas, por outro lado, nasce um novo absoluto associado ao conceito de espaço-tempo. Esse novo absoluto radica na invariância do intervalo entre acontecimentos do contínuo espaço-temporal. Dessa invariância resultam, nomeadamente, a dilatação do tempo e a contração do espaço.

Para inferir a dilatação do tempo, consideremos um relógio em repouso em \mathcal{O}' . Digamos que, do ponto de vista de \mathcal{O} , ele se encontra no ponto $x' = 0$. Isto significa que, do ponto de vista de \mathcal{O} , a sua linha de universo corresponde à equação $x = \beta t$. Então, da equação $t' = \gamma(t - \beta x)$, vem

$$t' = \gamma(1 - \beta^2)t = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}t = t\sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow \boxed{t = \gamma t' = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} > t'}.$$

Para inferir a contração do espaço, consideremos uma régua de comprimento ℓ' em repouso em \mathcal{O}' e cujas extremidades se encontram em $x' = 0$ e $x' = \ell'$. Do ponto de vista de \mathcal{O} esta régua encontra-se em movimento com velocidade β . O comprimento desta régua em \mathcal{O} é ℓ . Porém, ao medir ℓ as duas extremidades têm de ser medidas simultaneamente. Mas, simultaneamente do ponto de vista de \mathcal{O}' . Digamos que o instante dessa medição é o instante $t = 0$. Então, da equação $x' = \gamma(x - \beta t)$, as duas extremidades da régua são os pontos x tais que

$$t = 0 \Rightarrow x = \frac{x'}{\gamma} = x'\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Assim, a extremidade $x' = 0$ corresponde à extremidade $x = 0$ e a extremidade $x' = \ell'$ corresponde à extremidade

$$\boxed{x = \ell = \ell'\sqrt{1 - \beta^2} < \ell'}.$$

Vejamos, agora, como obter estes dois efeitos a partir da invariância do intervalo. Começemos pela dilatação do tempo. Por hipótese, um relógio está localizado no ponto $x' = x'_0$ e, portanto, em repouso em \mathcal{O}' . Logo, mede um tempo $T_0 = t'_2 - t'_1$, vindo

$$\mathcal{I}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_0 - x'_0)^2 = T_0^2.$$

Mas, por outro lado, a *equiloc* $x' = x'_0$ corresponde a uma linha de universo $x = \beta t + x_0$. Assim, vem

$$\mathcal{I}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = (t_2 - t_1)^2 - \beta^2 (t_2 - t_1)^2 = (1 - \beta^2)T^2,$$

onde se fez $T = t_2 - t_1$. Portanto, obtém-se

$$T_0^2 = (1 - \beta^2) T^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma T_0 > T_0}.$$

Vejamos, agora, a contracção do espaço. Por hipótese, uma régua de comprimento $L_0 = x_2 - x_1$ encontra-se em repouso do ponto de vista de \mathcal{O} . Logo, do ponto de vista de \mathcal{O}' , as duas extremidades têm de ser medidas no mesmo instante t'_0 que corresponde a uma *equitemp* cuja equação tem a forma $t = \beta x + t_0$. Ou seja,

$$\mathcal{I}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = (t'_0 - t'_0)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = -L^2,$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \beta^2 (x_2 - x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = -(1 - \beta^2) L_0^2,$$

onde se fez $L = x'_2 - x'_1$. Portanto, obtém-se

$$L^2 = (1 - \beta^2) L_0^2 \Rightarrow \boxed{L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} < L_0}.$$

5. O espaço quadrático de Minkowski

Já aqui se fez uma distinção entre espaço vectorial e espaço quadrático. Dito simplesmente: um espaço quadrático é um espaço vectorial (ou linear) ao qual se adicionou uma métrica. Por exemplo: o conceito de paralelismo é um conceito afim – enquadrável no conceito (mais específico) de espaço vectorial. Porém, o conceito de ortogonalidade requer uma estrutura (ainda) mais rica – uma métrica e, conseqüentemente, já só é enquadrável num espaço quadrático.

O plano euclidiano e o plano hiperbólico são duas realidades físico-geométricas completamente distintas – embora ambas radicadas no mesmo espaço vectorial $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

O plano hiperbólico é uma redução do espaço-tempo quadridimensional de Minkowski a um espaço-tempo bidimensional. Muitos aspectos relevantes do espaço quadrático de Minkowski são tratáveis no âmbito do plano hiperbólico. Por isso, sempre que não haja a necessidade de recorrer ao espaço de Minkowski completo (i.e., radicado em \mathbb{R}^4), conduzimos a nossa análise no plano hiperbólico. Por exemplo: quer a dilatação do tempo quer a contracção do espaço são explicáveis através do plano hiperbólico.

A principal excepção física diz respeito à composição de velocidades: só no espaço quadrático de Minkowski é que é possível abordar todos os efeitos associados à composição de velocidades. No plano hiperbólico a composição de velocidades já permite superar a contradição fundamental entre a adição galileana de velocidades e o segundo postulado. Porém, alguma fenomenologia – como, e.g., a rotação de Thomas – só pode ser revelada no espaço completo de Minkowski, i.e., escapa ao escrutínio do plano hiperbólico.

Nesta secção vamos reduzir a nossa análise do espaço quadrático de Minkowski ao plano hiperbólico.

Do ponto de vista do espaço vectorial (ou linear) \mathbb{R}^2 um acontecimento do plano hiperbólico ou um ponto do plano euclidiano são uma e a mesma coisa: um vector

$$\mathbf{r} = t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 .$$

Este vector é, apenas, uma forma diferente de especificar o par ordenado $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. O que se requer, aqui, é a existência de uma base

$$\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \}$$

linearmente independente e completa. Por exemplo: a base canónica

$$\mathbf{e}_0 = (t=1, x=0), \quad \mathbf{e}_1 = (t=0, x=1),$$

é uma possibilidade. Porém, nada é – por enquanto – dito sobre a eventual ortogonalidade dos dois vectores desta base (muito menos, portanto, sobre o «comprimento» de cada um destes vectores).

Só quando se estabelece uma métrica é que entra em acção a noção de espaço quadrático. Uma métrica é a matriz

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}.$$

Obviamente que esta matriz depende, para a sua introdução, de um produto interno entre vectores. É aqui que entra a noção de ortogonalidade (bem como a noção de «comprimento»).

Uma métrica euclidiana é, tão somente, o seguinte (definição de plano euclidiano através da matriz identidade):

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Porém, esta métrica euclidiana é fisicamente incompatível com a teoria da relatividade. Porquê? Porque a sua adopção implicava a invariância de

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1) \cdot (t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1) = t^2 (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0) + tx (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0) + x^2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1).$$

Porém, dado que o produto interno é simétrico, tem-se

$$\boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1},$$

pelo que

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{r}^2 = t^2 (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0) + 2tx (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1) + x^2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \\ = t^2 \mathbf{e}_0^2 + 2tx (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1) + x^2 \mathbf{e}_1^2 \end{array} \right.$$

Na métrica euclidiana, tem-se

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \end{array} \right.$$

o que implica a invariância da forma quadrática

$$\mathbf{r}^2 = t^2 + x^2 = (t')^2 + (x')^2.$$

A métrica lorentziana diverge da métrica euclidiana. Na métrica lorentziana, tem-se

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pelo que

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1 \end{cases}$$

o que implica a invariância de

$$\boxed{\mathbf{r}^2 = t^2 - x^2 = (t')^2 - (x')^2}.$$

Ora, como se viu na secção anterior, esta última equação é idêntica à invariância do intervalo. Logo, está correcta. A matriz identidade (métrica euclidiana) não tem existência física no contexto do espaço-tempo. É o plano hiperbólico que corresponde à física relativista:

$$\boxed{\begin{aligned} g_{01} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = g_{10} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \\ g_{00} = \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ g_{11} = \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1 \end{aligned}}.$$

Note-se a semelhança com o corpo \mathbb{C} dos complexos. A unidade imaginária $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ é tal que $i^2 = -1$. Da mesma forma, o vector $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^2$ é tal que $\mathbf{e}_1^2 = -1$. A fórmula de Euler

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

tem, assim, uma correspondente generalização. Como

$$\mathbf{e}_1^2 = -1 \Rightarrow \mathbf{e}_1^{2k} = [(\mathbf{e}_1)^2]^k = (-1)^k \Rightarrow \mathbf{e}_1^{2k+1} = \mathbf{e}_1^{2k} \mathbf{e}_1 = (-1)^k \mathbf{e}_1,$$

vem

$$\left. \begin{aligned} \exp(\pi \mathbf{e}_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi \mathbf{e}_1)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi \mathbf{e}_1)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi \mathbf{e}_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{e}_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(\pi) + \mathbf{e}_1 \sin(\pi) \\ &= -1 \end{aligned} \right|$$

donde se infere que (também)

$$e^{-\pi \mathbf{e}_1} + 1 = 0$$

Mais geralmente, vem

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \mathbb{C},$$

pois

$$\cos(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Analogamente,

$$e^{\theta \mathbf{e}_1} = \cos(\theta) + \mathbf{e}_1 \sin(\theta).$$

Para $\theta = m\pi$, com $m \in \mathbb{Z}$, é

$$e^{\theta \mathbf{e}_1} = \cos(m\pi) = (-1)^m \in \mathbb{R}.$$

Para $\theta = \pi/2 + m\pi$, com $m \in \mathbb{Z}$, é

$$e^{\theta \mathbf{e}_1} = \mathbf{e}_1 \sin(m\pi) = (-1)^m \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, em geral, tem-se

$$e^{\theta \mathbf{e}_1} = \cos(\theta) + \mathbf{e}_1 \sin(\theta) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2,$$

onde $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ indica a chamada *soma directa* dos espaços vectoriais \mathbb{R} com \mathbb{R}^2 . Note-se, contudo, que

$$e^{\phi \mathbf{e}_0} = \cosh(\phi) + \mathbf{e}_0 \sinh(\phi) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2,$$

pois

$$\mathbf{e}_0^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{e}_0^{2k} = [(\mathbf{e}_0)^2]^k = 1 \Rightarrow \mathbf{e}_0^{2k+1} = \mathbf{e}_0^{2k} \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0,$$

tendo-se, ainda,

$$\cosh(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Na secção anterior deduziu-se a transformação de Lorentz. Vamos, agora, deduzir de que forma se transforma a base

$$\mathcal{B}(S) = \{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \} \mapsto \mathcal{B}(S') = \{ \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \}$$

num *boost* de Lorentz.

A ideia fundamental é a seguinte: o vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{1,1}$ mantém-se num *boost* de Lorentz.

$$\begin{bmatrix} (t, x) \\ (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (t', x') \\ (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{r} = \underbrace{t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1}_S = \underbrace{t'\mathbf{f}_0 + x'\mathbf{f}_1}_{S'}}.$$

Ou seja: o mesmo vector \mathbf{r} é visto no sistema de coordenadas S como $\mathbf{r} = t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1$ e, no sistema de coordenadas S' , como $\mathbf{r} = t'\mathbf{f}_0 + x'\mathbf{f}_1$. Mas já se viu, na secção anterior, que

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Assim, infere-se que

$$\mathbf{r} = t'\mathbf{f}_0 + x'\mathbf{f}_1 = \gamma(t - \beta x)\mathbf{f}_0 + \gamma(x - \beta t)\mathbf{f}_1 = t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1,$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma(t - \beta x)\mathbf{f}_0 + \gamma(x - \beta t)\mathbf{f}_1 &= \gamma(\mathbf{f}_0 - \beta\mathbf{f}_1)t + \gamma(\mathbf{f}_1 - \beta\mathbf{f}_0)x \\ &= t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

pelo que se obtém

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = \gamma(\mathbf{f}_0 - \beta\mathbf{f}_1) \\ \mathbf{e}_1 = \gamma(\mathbf{f}_1 - \beta\mathbf{f}_0) \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix}.$$

Note-se, porém, que

$$\left[\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, podemos escrever:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} \end{array}}.$$

Repare-se que, deste modo, vem

$$\begin{cases} g_{01} = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_1 = g_{10} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_0 = 0 \\ g_{00} = \mathbf{f}_0^2 = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_0 = 1 \\ g_{11} = \mathbf{f}_1^2 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = -1 \end{cases} .$$

Por exemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1^2 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = [\gamma (\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_0)] \cdot [\gamma (\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_0)] \\ = \gamma^2 (\mathbf{e}_1^2 + \beta^2 \mathbf{e}_0^2) \\ = -\gamma^2 (1 - \beta^2) \\ = -1. \end{cases}$$

Podemos, também, construir a tabela seguinte.

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma & \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = -\gamma\beta \\ \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma\beta & \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -\gamma \end{cases}$$

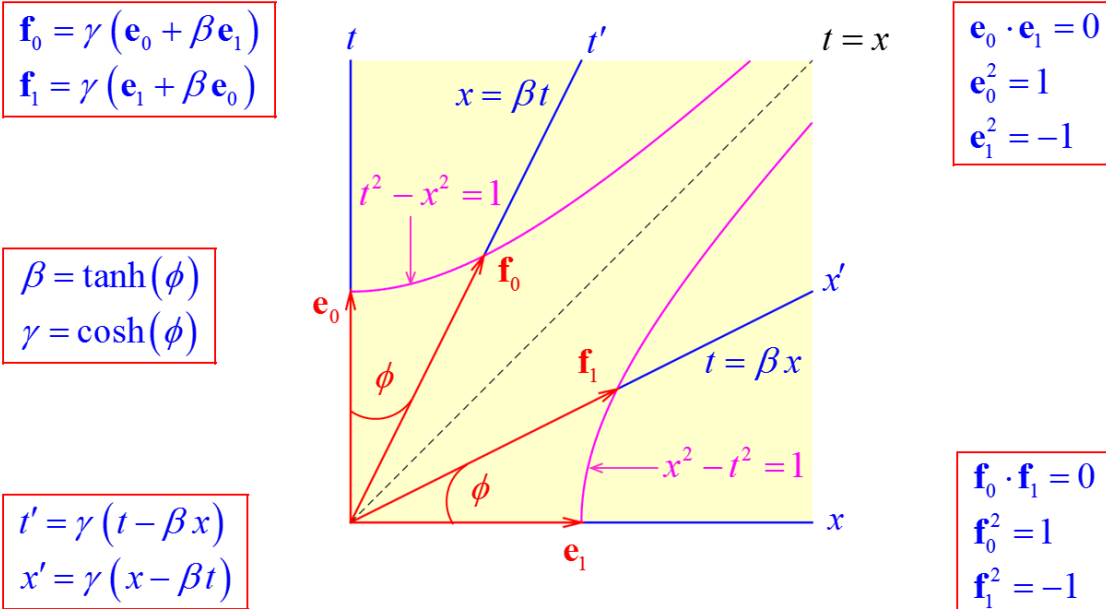
Seguindo a nomenclatura da secção anterior, vem

$$\boxed{\mathbf{r} = t \mathbf{e}_0 + x \mathbf{e}_1} \quad \mapsto \quad \boxed{\mu(\mathbf{r}) = \sqrt{|\mathbf{r}^2|}} .$$

Esta medida μ não depende do sistema de coordenadas (ou observador) considerado.

Figura 26

Nesta figura apresenta-se um diagrama de Minkowski.



Consideram-se, para este diagrama, os seguintes valores:

$$\left[\begin{array}{l} \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array} \right] \mapsto \boxed{\phi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \ln(\sqrt{3}) \approx 0.5493} .$$

O mais importante desta figura é a sua natureza não-euclidiana. A saber: o «comprimento», ou – usando a terminologia introduzida na secção anterior – a medida μ dos quatro vectores $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}$ é a mesma. Estes quatro vectores são *vectores unitários*:

$$\boxed{\mu(\mathbf{e}_0) = \mu(\mathbf{e}_1) = \mu(\mathbf{f}_0) = \mu(\mathbf{f}_1) = 1} .$$

Note-se que um observador (ou relógio ideal) corresponde a um vector unitário do tipo tempo (que define, também, uma família de *equilocs*). Um vector unitário do tipo espaço define uma família de *equitemps*. Um *boost* de Lorentz transforma o observador \mathbf{e}_0 no observador \mathbf{f}_0 .

O ângulo ϕ é hiperbólico – não pode ser considerado um ângulo euclidiano. A hipérbole $t^2 - x^2 = 1$ é o lugar geométrico dos afixos dos vectores do tipo tempo, centrados na origem, com medida (lorentziana) unitária. Por sua vez, a hipérbole $x^2 - t^2 = 1$ é o lugar geométrico dos afixos dos vectores do tipo espaço, centrados na origem, com medida (lorentziana) unitária. Qualquer vector sobre a recta $t = x$ tem medida (lorentziana) nula ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{u} = \alpha (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \mapsto \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \alpha^2 (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \mapsto \mu(\mathbf{u}) = 0.$$

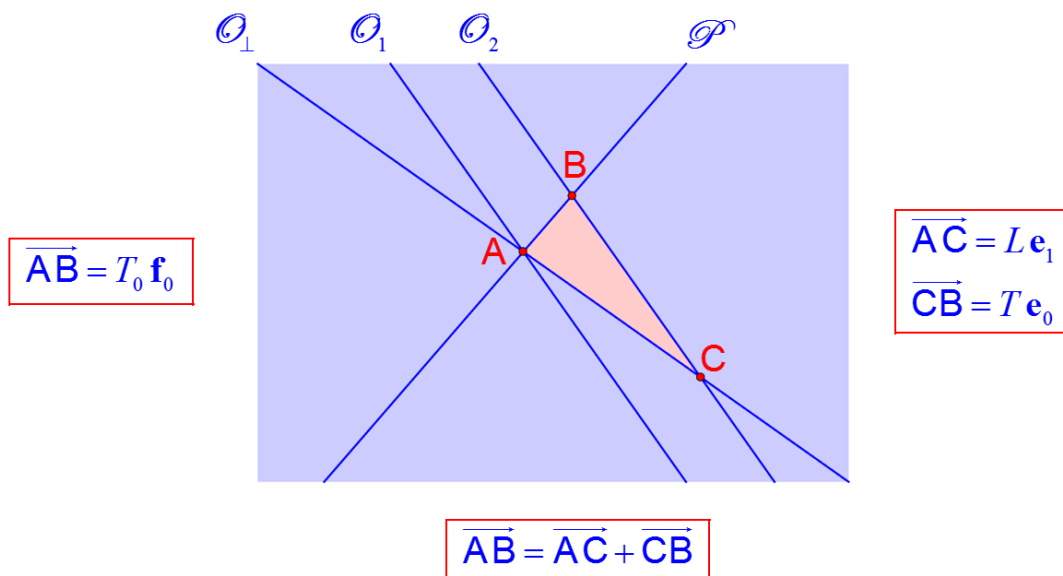
6. Dilatação do tempo e contracção do espaço

Nesta secção abordam-se, formalmente, duas das consequências mais conhecidas da teoria da relatividade restrita – a dilatação do tempo e a contracção do espaço. Trata-se de duas consequências da relatividade do conceito de simultaneidade.

Comecemos pela dilatação do tempo: Fig. 27.

Figura 27

Nesta figura analisa-se a dilatação do tempo.



Consideram-se dois observadores \mathcal{O} e \mathcal{P} . Do ponto de vista de \mathcal{P} o intervalo temporal entre dois acontecimentos A e B é dado por T_0 , tal que

$$\overline{AB} = T_0 \mathbf{f}_0.$$

Pretende-se, então, saber o seguinte: do ponto de vista de \mathcal{O} , que vê o observador \mathcal{P} a afastar-se de si com uma velocidade relativa β , qual é o intervalo de tempo T entre esses dois acontecimentos A e B?

Para responder a esta pergunta utilizam-se os conceitos vectoriais deduzidos anteriormente – nomeadamente, o que se referiu em relação às Figs. 25 e 26. Começemos por notar que se tem

$$\overline{\mathbf{CB}} = T \mathbf{e}_0.$$

Podemos dizer, então, que

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{AC}} + \overline{\mathbf{CB}} \Rightarrow T_0 \mathbf{f}_0 = L \mathbf{e}_1 + T \mathbf{e}_0,$$

uma vez que $\overline{\mathbf{AC}} = L \mathbf{e}_1$. Logo, se se fizer o produto interno de ambos os membros da última equação pelo vector \mathbf{e}_0 , é possível fazer desaparecer o termo (desconhecido) $L \mathbf{e}_1$ pois $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0$. Sobra, portanto,

$$T_0 (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0) = T (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0) \Rightarrow T_0 (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0) = T \mathbf{e}_0^2.$$

Porém, como se viu anteriormente, tem-se

$$\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1, \quad \mathbf{e}_0^2 = 1.$$

Infere-se, assim, a dilatação do tempo

$$\boxed{T = \gamma T_0 \geq T_0}.$$

Ou seja: o observador \mathcal{O} verifica que o relógio de \mathcal{P} (que está em movimento, do seu ponto de vista, marcando um lapso de tempo T_0) se atrasa em relação ao seu próprio relógio (que marca, para o mesmo intervalo de espaço-tempo, um lapso de tempo T).

Podemos dizer, de forma mais sucinta, que

$$\boxed{T = \mathbf{e}_0 \cdot \overline{\mathbf{AB}} = T_0 (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0) = \gamma T_0}.$$

Saliente-se o seguinte: para se chegar à dilatação do tempo na Fig. 27, onde se consideram os acontecimentos \mathbf{A} e \mathbf{B} , houve que considerar três relógios – um relógio \mathcal{P} (que mede T_0) e dois relógios \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 (que medem T).

Note-se que o comprimento L se poderia (também) obter de

$$T_0 \mathbf{f}_0 = L \mathbf{e}_1 + T \mathbf{e}_0$$

fazendo o produto interno com o vector \mathbf{e}_1 . Viria

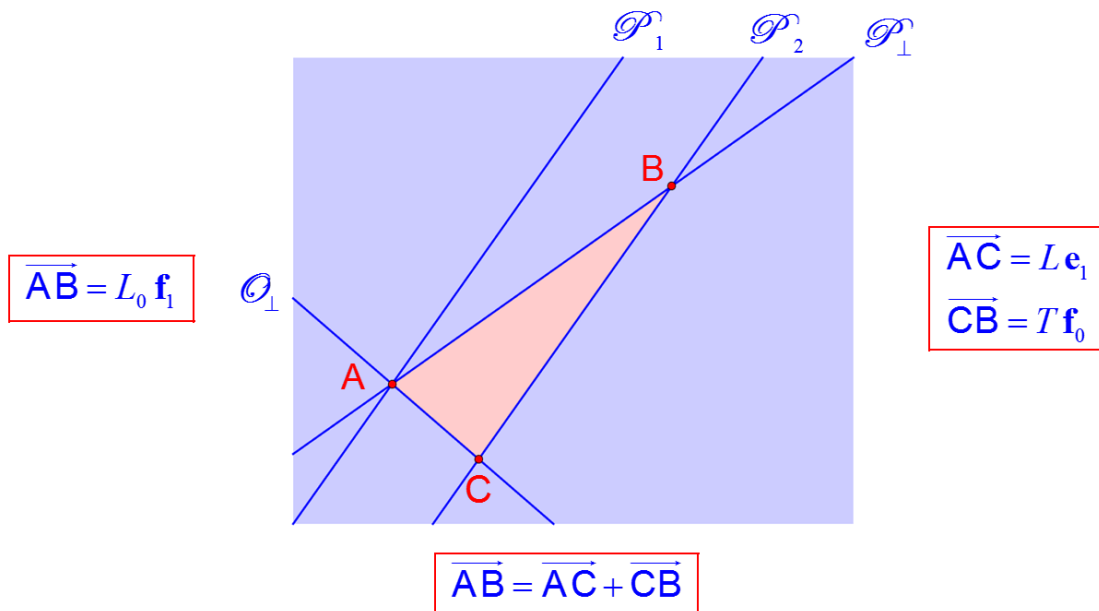
$$T_0 (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_1) = L (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \Rightarrow -\gamma \beta T_0 = -L \Rightarrow \boxed{L = \beta T}.$$

Mas então, qual dos dois pontos de vista é que está certo (ou, é real)? O leitor deverá saber reconhecer que esta pergunta não tem sentido: ambos os pontos de vista estão certos; ninguém se enganou. Esta diferença não é uma ilusão – é mesmo real (e tem sido verificada experimentalmente, quer directa quer indirectamente). E mais: como se analisará, adiante, mais em pormenor, a dilatação do tempo tem de ser – pelo primeiro postulado – um efeito recíproco. Ou seja: o resultado seria fisicamente o mesmo se se inverterm os papéis de \mathcal{O} e \mathcal{P} .

Vejamos, agora, o outro efeito – a contracção do comprimento: Fig. 28.

Figura 28

Nesta figura analisa-se a contracção do comprimento.



Consideram-se, novamente, dois observadores \mathcal{O} e \mathcal{P} . Do ponto de vista de \mathcal{P} uma régua de comprimento L_0 encontra-se em repouso: a extremidade esquerda da régua é dada pela *equiloc* \mathcal{P}_1 enquanto que a extremidade direita corresponde à *equiloc* \mathcal{P}_2 . Assim,

$$\overline{AB} = L_0 \mathbf{f}_1.$$

Pretende-se, então, saber o seguinte: do ponto de vista de \mathcal{O} , que vê o observador \mathcal{P} (e, com ele, a régua) a afastar-se de si, com uma velocidade relativa β , qual é o comprimento L dessa mesma régua? Naturalmente, que – para efectuar uma medição correcta – o observador \mathcal{O} tem de medir as duas extremidades simultaneamente, i.e., sobre uma mesma *equitemp* \mathcal{O}_\perp . Ou seja,

$$\overline{AC} = L\mathbf{e}_1.$$

Logo, vem

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \Rightarrow L_0\mathbf{f}_1 = L\mathbf{e}_1 + T\mathbf{f}_0,$$

pois $\overline{CB} = T\mathbf{f}_0$. Mas, como se desconhece o valor de T , podemos eliminar esta parcela fazendo um produto interno com o vector \mathbf{f}_1 , já que $\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_1 = 0$. Obtém-se, assim,

$$L_0(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) = L(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_1) \Rightarrow L_0\mathbf{f}_1^2 = L(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_1).$$

Portanto, tendo em consideração que

$$\mathbf{f}_1^2 = -1, \quad \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -\gamma,$$

resulta que

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0.$$

Ou seja: o observador \mathcal{O} verifica que a régua que tem, para \mathcal{P} (que está em movimento, do seu ponto de vista), um comprimento L_0 , aparece contraída pois – do seu próprio ponto de vista – o verdadeiro comprimento da régua é L .

Podemos dizer, de forma mais sucinta, que

$$L_0 = -\mathbf{f}_1 \cdot \overline{AB} = -L(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = \gamma L.$$

Saliente-se o seguinte: para se chegar à contracção do espaço na Fig. 28 houve que considerar duas *equilocs* \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 (as duas extremidades da régua) e duas *equitemps* \mathcal{O}_1 e \mathcal{P}_1 (onde se medem os comprimentos dos dois pontos de vista distintos). As duas *equilocs* \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 correspondem, naturalmente, ao observador que vê a régua em repouso.

Note-se que o tempo T se poderia (também) obter de

$$L_0\mathbf{f}_1 = L\mathbf{e}_1 + T\mathbf{f}_0$$

fazendo o produto interno com o vector \mathbf{e}_0 . Viria

$$L_0(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_0) = T(\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0) \Rightarrow \gamma\beta L_0 = \gamma T \Rightarrow T = \beta L_0.$$

Tal como no caso da dilatação do tempo, a contracção do espaço é um efeito real, recíproco, em que ambos os pontos de vista (o de \mathcal{O} e o de \mathcal{P}) estão correctos.

Na figura seguinte – a Fig. 29 – mostra-se em que sentido a dilatação do tempo é um efeito recíproco (tal como impõe o princípio da relatividade).

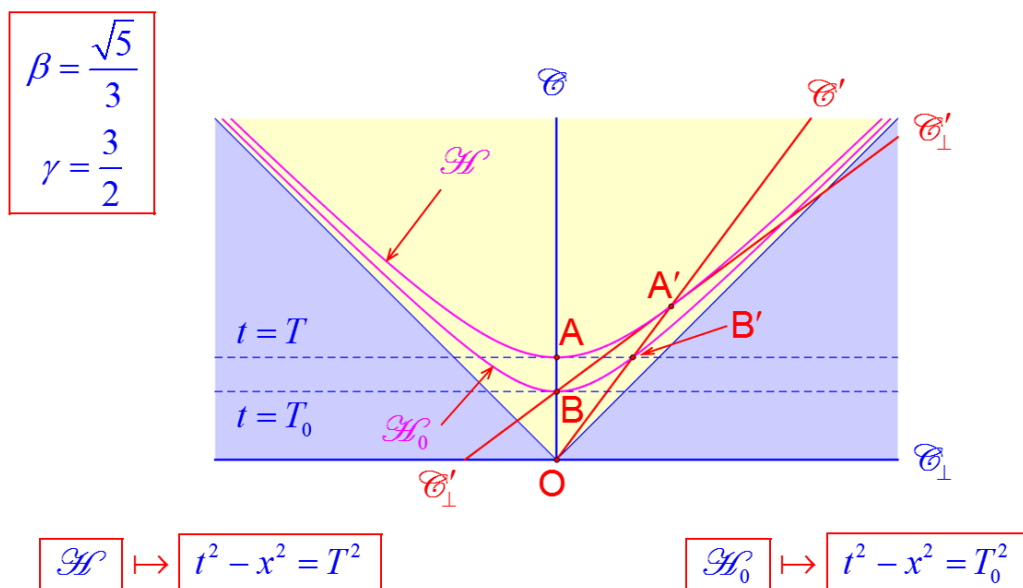


Figura 29

Nesta figura mostra-se como a dilatação do tempo é recíproca. Começemos por considerar a perspectiva do observador correspondente à *equiloc* \mathcal{C} . O intervalo de tempo que decorre entre os acontecimentos O e A é T como prova a hipérbole \mathcal{H} . Do ponto de vista de \mathcal{C} o acontecimento de \mathcal{C}' que é simultâneo com A é o acontecimento B' . Porém, $B' \in \mathcal{H}_0$, i.e., o relógio \mathcal{C}' marca $T_0 < T$ em B' . É esta a dilatação do tempo na perspectiva do observador \mathcal{C} . Vejamos, agora, a outra perspectiva – a do observador \mathcal{C}' . O intervalo de tempo que decorre entre os acontecimentos O e A' é T como prova a hipérbole \mathcal{H} . Do ponto de vista de \mathcal{C}' o acontecimento que é simultâneo com A' é o acontecimento B . Porém, $B \in \mathcal{H}_0$, i.e., o relógio \mathcal{C} marca $T_0 < T$ em B . É esta a dilatação do tempo na perspectiva do observador \mathcal{C}' . A quantificação da relação entre T e T_0 é fácil de estabelecer: basta substituir $x = \beta t$ na equação $t^2 - x^2 = T_0^2$ e resolver em ordem a $t = T$ (acontecimento B' na perspectiva de \mathcal{C}) para se obter $(1 - \beta^2)T^2 = T_0^2$ donde se tira $T = \gamma T_0$.

Na figura seguinte – a Fig. 30 – mostra-se em que sentido a contracção do espaço é (tal como a dilatação do tempo) um efeito (também) recíproco.

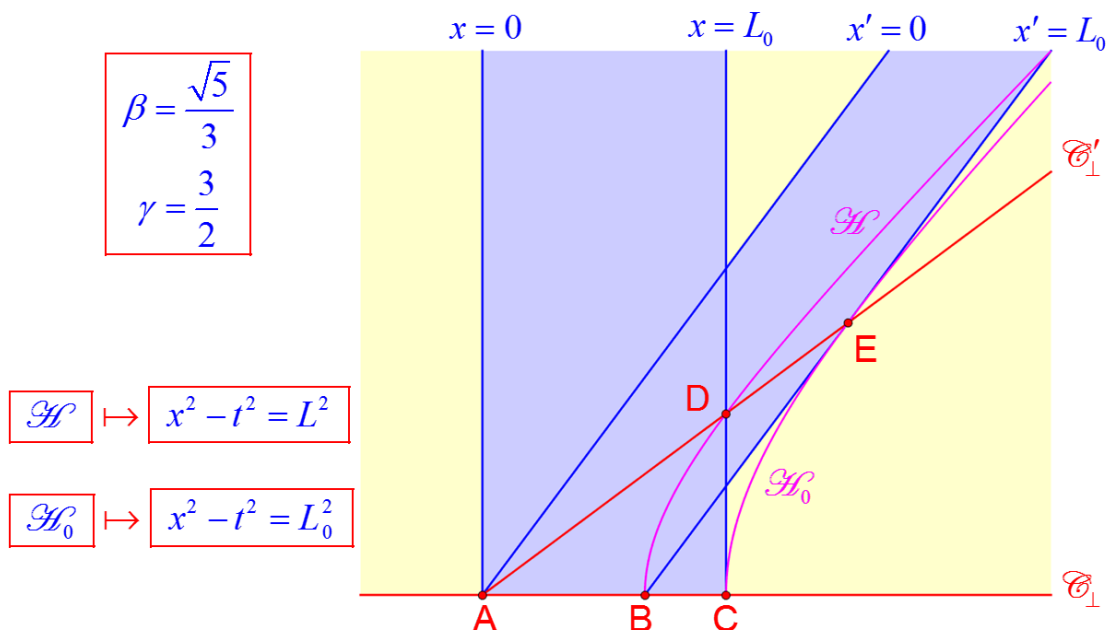


Figura 30

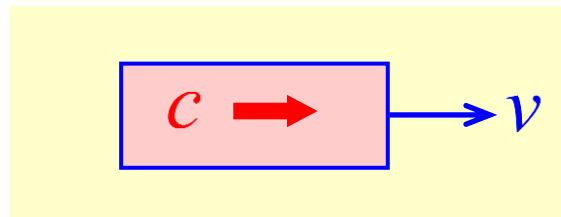
Nesta figura mostra-se como a contração do espaço é recíproca. Do ponto de vista do observador \mathcal{C} uma régua de comprimento L_0 encontra-se, em repouso, entre as *equilocs* $x=0$ e $x=L_0$. Com efeito, o comprimento da régua é medido sobre a equitemp \mathcal{C}_\perp entre os acontecimentos A e C. Porém, para o observador \mathcal{C}' , esta régua está em movimento; o seu comprimento é L medido sobre a equitemp \mathcal{C}'_\perp e corresponde ao comprimento entre os acontecimentos A e D. As hipérbolas de calibração mostram, claramente, que existe uma contração do espaço pois $L < L_0$. Porém, do ponto de vista do observador \mathcal{C}' uma régua de comprimento (também) L_0 encontra-se, em repouso, entre as *equilocs* $x'=0$ e $x'=L_0$. Com efeito, o comprimento da régua é medido sobre a equitemp \mathcal{C}'_\perp entre os acontecimentos A e E. Porém, para o observador \mathcal{C} , esta régua está em movimento; o seu comprimento é L medido sobre a equitemp \mathcal{C}_\perp e corresponde ao comprimento entre os acontecimentos A e B. As hipérbolas de calibração mostram, novamente, que existe uma contração do espaço pois $L < L_0$. A quantificação da relação entre L e L_0 é fácil de estabelecer: basta substituir $t = \beta x$ na equação $x^2 - t^2 = L^2$ e resolver em ordem a $x = L_0$ (acontecimento D na perspectiva de \mathcal{C}) para se obter $(1 - \beta^2) L_0^2 = L^2$ donde se tira $L = L_0 / \gamma$.

7. A nova lei de composição de velocidades

Como já se disse, o que provocou o colapso da mecânica newtoniana foi o facto de esta derivar de uma transformação fundamentalmente errada – a transformação de Galileu (Fig. 4). O alicerce básico da transformação de Galileu era a ideia, revelada falsa, de que a *simultaneidade* era um conceito absoluto. Aliás, nem sequer esta suposição era formulada explicitamente: era considerada como tão «natural», tão «evidente» e baseada no «common sense», que nem sequer era admitida a mínima dúvida sobre a sua validade. Mas, como já se viu anteriormente, a simultaneidade de dois acontecimentos não pode ser uma afirmação *universal*: apenas um determinado referencial de inércia está habilitado a decretar a simultaneidade de dois acontecimentos separados espacialmente entre si; para outro referencial (de inércia), em movimento uniforme e relativo em relação ao primeiro, esses mesmos dois acontecimentos (já) não podem ser considerados simultâneos.

A simultaneidade é, de facto, um conceito relativo, que depende do sistema de coordenadas que observa esses dois acontecimentos.

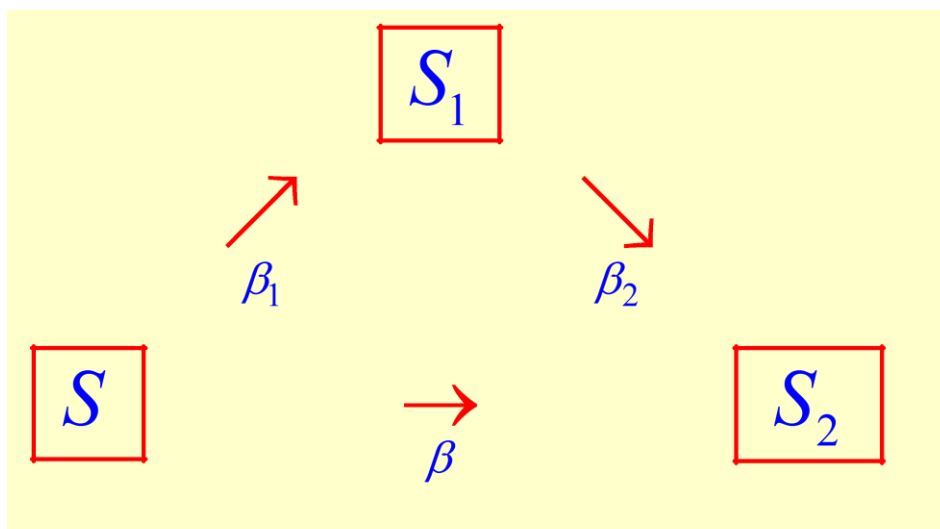
Ora, ao analisar o problema, localizámos o erro originário, já referida na página 7: um sinal electromagnético é emitido, com velocidade c , no interior de um vagão de comboio. Este vagão desloca-se, com velocidade $v = \beta c$, em relação à estação. Logo, pela *adição de velocidades* correspondente à transformação de Galileu, a velocidade do sinal electromagnético – emitido no interior do vagão – teria de ter uma velocidade $u = c + v$ para um observador colocado na referida estação de comboios (que vê o comboio em movimento com velocidade v).



Mas não é isso que, na realidade, se passa. De acordo com o segundo postuludo da teoria da relatividade restrita de Einstein, esta composição de velocidades não pode ser reduzida a uma simples adição: $u \neq c + v$. A nova lei de *composição de velocidades* da relatividade tem de ser diferente de uma simples soma: vamos, doravante, designá-la de uma forma diferente da simples adição; vamos designá-la como sendo $u = c \oplus v \neq c + v$. De facto, de acordo com o segundo postuludo, essa nova lei de composição de velocidades deverá ser tal que, neste caso específico, o seu resultado deverá ser o

seguinte: $u = c \oplus v = c$. Mas, já agora, para pequenas velocidades, o resultado não deverá diferir – de forma significativa – da lei de adição de velocidades de Galileu, i.e., neste caso deverá ter-se (aproximadamente) $u = v_1 \oplus v_2 \approx v_1 + v_2$.

Sejamos, então, absolutamente claros. Consideremos três referenciais de inércia: (i) $S \mapsto (x, t)$; (ii) $S_1 \mapsto (x', t')$; (iii) $S_2 \mapsto (x'', t'')$. Em tudo o que se segue utilizam-se unidades geométricas, com $c = 1$. O sistema S_1 afasta-se de S com velocidade β_1 , enquanto que o sistema S_2 se afasta de S_1 com velocidade β_2 . Diremos, ainda, que S_2 se afasta de S com velocidade β . Na transformação de Galileu, errada, tem-se $\beta = \beta_1 + \beta_2$.



Para deduzir a nova lei de composição de velocidades, podemos recorrer a uma técnica que já provou ser altamente eficaz: o *factor de Bondi*. Então – tal como se viu anteriormente (Fig. 19, página 35) – tem-se (a definição de rapidez ϕ encontra-se na página 47)

$$\kappa_1 = e^{\phi_1} = \sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}}, \quad \kappa_2 = e^{\phi_2} = \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}, \quad \kappa = e^{\phi} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Mas, por outro lado – tal como se viu na página 49 – vem

$$\begin{cases} t' - x' = \kappa_1 (t - x) \\ t'' - x'' = \kappa_2 (t' - x') \\ t'' - x'' = \kappa (t - x) \end{cases} \Rightarrow \boxed{t'' - x'' = \kappa (t - x) = \kappa_1 \kappa_2 (t - x)}$$

donde se infere, portanto, que

$$\kappa = \kappa_1 \kappa_2 \Rightarrow e^{\phi} = e^{\phi_1} e^{\phi_2} \Rightarrow e^{\phi} = e^{\phi_1 + \phi_2} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1 + \phi_2}.$$

Porém, sabe-se que

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh(\phi_1) + \tanh(\phi_2)}{1 + \tanh(\phi_1) \tanh(\phi_2)},$$

donde

$$\tanh(\phi) = \frac{\tanh(\phi_1) + \tanh(\phi_2)}{1 + \tanh(\phi_1) \tanh(\phi_2)}.$$

Logo, atendendo a que (ver página 47)

$$\beta_1 = \tanh(\phi_1), \quad \beta_2 = \tanh(\phi_2), \quad \beta = \tanh(\phi),$$

obtem-se

nova lei de composição de velocidades	\mapsto	$\beta = \beta_1 \oplus \beta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$
--	-----------	---

Esta é, assim, a nova lei da composição de velocidades. Em unidades SI, em que $v_1 = \beta_1 c$, $v_2 = \beta_2 c$ e $v = \beta c$, escreve-se então

$v = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$

Assim, em particular, se $v_1 = c$ e $v_2 = v$, resulta que

$$u = c \oplus v = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c \left(\frac{c + v}{c + v} \right) = c,$$

que está de acordo – como não podia deixar de ser – com o segundo postuludo de Einstein.

Porém, de que forma se pode obter a anterior transformação (adição simples) de Galileu? Basta, para o efeito, admitir que a velocidade da luz é infinita: $c = \infty$. Neste caso, então, $v_1 v_2 / c^2 \rightarrow 0$, pelo que

antiga lei de composição de velocidades	\mapsto	$v = v_1 \oplus v_2 \approx v_1 + v_2,$
--	-----------	---

que dá origem a resultados cada vez mais errados à medida que (pelos menos) uma das velocidades (v_1 ou v_2) tende para c .

Não devemos esquecer, porém, que se trata aqui de uma simplificação: apenas se está a considerar uma única dimensão espacial. Quando todas as três dimensões espaciais são tidas em consideração, a lei de composição das velocidades torna-se mais complicada, dando origem a nova fenomenologia

que, neste caso mais simples do espaço hiperbólico $\mathbb{R}^{1,1}$, não é possível descrever. O caso geral está, contudo, para além do objectivo destes apontamentos.

Para ilustrar a diferença entre as duas formas de composição de velocidades, consideremos o caso particular em que $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$. Na transformação de Galileu o resultado seria $\beta = \beta_0 + \beta_0 = 2\beta_0$. Na transformação de Lorentz (deduzida por Einstein, no contexto da relatividade restrita), vem contudo

$$\beta = \beta_0 \oplus \beta_0 = \frac{2\beta_0}{1 + \beta_0^2}.$$

Nestas circunstâncias, obtém-se

$$\frac{d\beta}{d\beta_0} = \frac{2(1 - \beta_0^2)}{(1 + \beta_0^2)^2}, \quad \frac{d^2\beta}{d\beta_0^2} = \frac{4\beta_0(\beta_0^2 - 3)}{(1 + \beta_0^2)^3}.$$

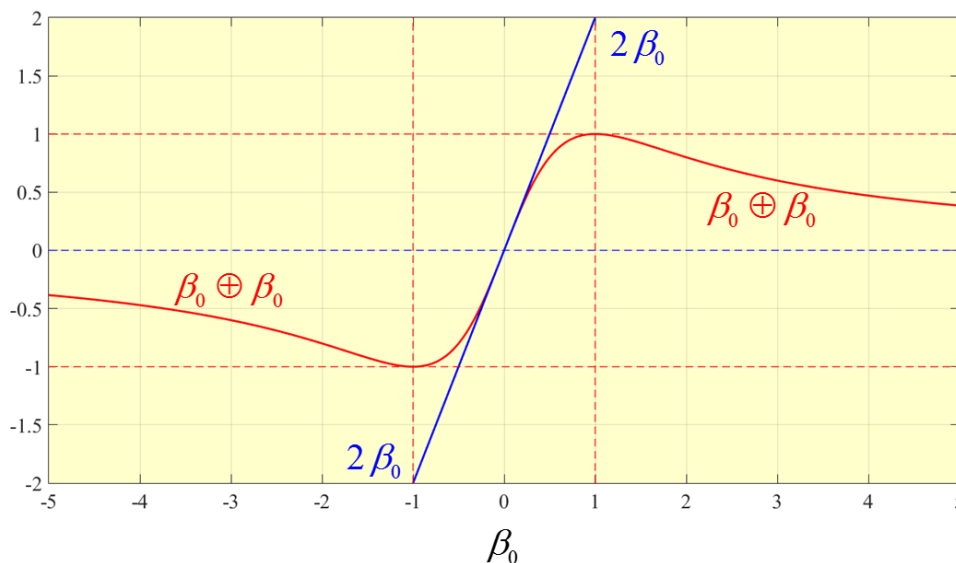
Ou seja: na região em que $\beta_0 \geq 0$ a função $\beta = \beta(\beta_0)$ é crescente para $\beta_0 < 1$ e decrescente para $\beta_0 > 1$; a função tem um máximo em $\beta_0 = 1$ onde vale $\beta = 1$ sendo côncava para baixo para $\beta_0 < \sqrt{3}$ e côncava para cima para $\beta_0 > \sqrt{3}$. A diferença Δ entre as duas teorias (newtoniana e relativista) é, portanto,

$$\Delta = (\beta_0 + \beta_0) - (\beta_0 \oplus \beta_0) = 2\beta_0 - \frac{2\beta_0}{1 + \beta_0^2} = \frac{2\beta_0^3}{1 + \beta_0^2}.$$

Infere-se, assim, que $0 \leq \Delta \leq 1$ no intervalo $0 \leq \beta_0 \leq 1$, tendo-se: (i) $\Delta = 0$ para $\beta_0 = 0$; (ii) $\Delta = 0.2$ para $\beta_0 = 0.5$; (iii) $\Delta = 1$ para $\beta_0 = 1$. A Fig. 31 ilustra esta composição de velocidades.

Figura 31

Esta figura (ver página seguinte) representa a composição de duas velocidades colineares (i.e., paralelas e com o mesmo sentido) de valor β_0 . Ao aplicar a transformação de Galileu, obtém-se $\beta = \beta_0 + \beta_0 = 2\beta_0$. Porém, ao aplicar a teoria da relatividade restrita de Einstein, obtém-se $\beta = \beta_0 \oplus \beta_0 = 2\beta_0 / (1 + \beta_0^2)$. Mesmo que se combinem duas velocidades supra-luminosas, com $|\beta_0| > 1$, o resultado é uma velocidade sub-luminosa, com $|\beta| = |\beta_0 \oplus \beta_0| < 1$. Mas, mais importante: não é possível ultrapassar o valor máximo $|\beta| = 1$ a partir da combinação de duas velocidades idênticas sub-luminosas. Mais adiante ver-se-á como a existência de velocidades supra-luminosas poderia violar o princípio da causalidade.



Todavia, se se considerar $0 < \beta_0 < 1$, com $\beta_1 = \beta_0 - \alpha$ e $\beta_2 = \beta_0 + \alpha$, então

$$\beta = \beta_1 \oplus \beta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \frac{2\beta_0}{1 + \beta_0^2 - \alpha^2}.$$

Neste caso facilmente se verifica que é possível encontrar um intervalo de valores de α que torna a composição das duas velocidades supra-luminosa: com efeito,

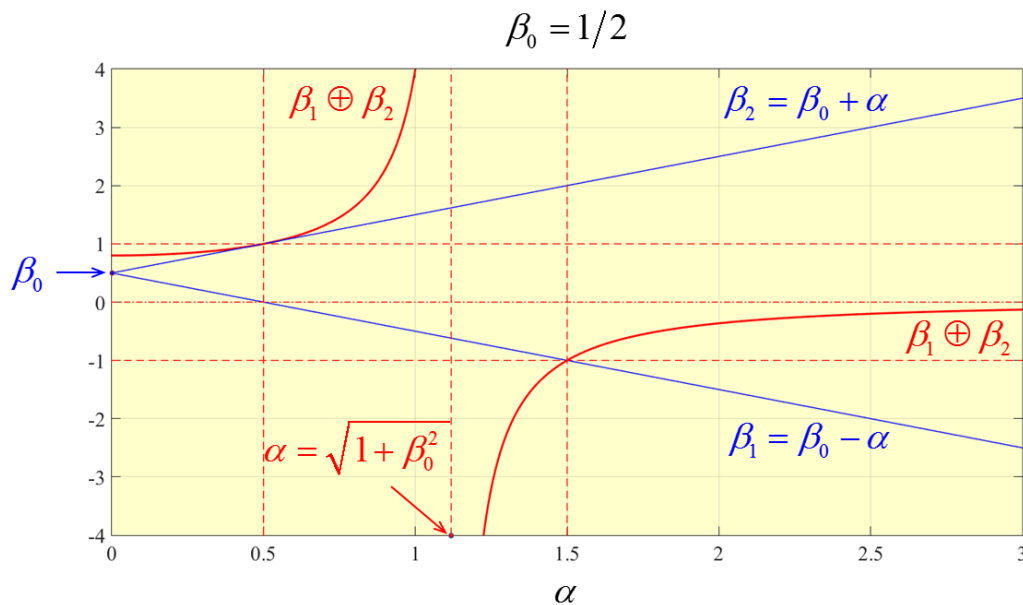
$$\beta = \frac{2\beta_0}{1 + \beta_0^2 - \alpha^2} = \pm 1 \Rightarrow \alpha = 1 \mp \beta_0.$$

Assim, neste caso, é $|\beta| > 1$ desde que $1 - \beta_0 < \alpha < 1 + \beta_0$. Para $\alpha = 1$ é sempre $\beta = 2/\beta_0 > 1$. Por exemplo: se $\beta_0 = 1/2$ e $\alpha = 1$, é $\beta_1 = \beta_0 - \alpha = -1/2$ e $\beta_2 = \beta_0 + \alpha = 3/2$, pelo que $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2 = 4$. Também $\beta = -2/\beta_0 < -1$ para $\alpha = \sqrt{1 + 2\beta_0^2}$. Obtém-se mesmo $\beta \rightarrow \infty$ quando se faz $\alpha \rightarrow \sqrt{1 + \beta_0^2}$. A Fig. 32 mostra um caso particular: considera-se $\beta_0 = 1/2$.

Figura 32

Nesta figura analisa-se a composição de velocidades quando $0 < \beta_0 < 1$ e se faz $\beta_1 = \beta_0 - \alpha$ e $\beta_2 = \beta_0 + \alpha$. A composição relativista de velocidades, neste caso, dá velocidades supra-luminosas no intervalo $1 - \beta_0 < \alpha < 1 + \beta_0$. Existe mesmo uma singularidade ($\beta = \infty$) para $\alpha = \sqrt{1 + \beta_0^2}$. Nesta

figura admite-se que $\beta_0 = 1/2$. A função $\beta = \beta(\alpha)$ é par, i.e., $\beta(-\alpha) = \beta(\alpha)$. Deve salientar-se, porém, que: (i) para $\alpha = 1 - \beta_0 = 1/2$, as duas velocidades consideradas são $\beta_1 = \beta_0 - \alpha = 2\beta_0 - 1 = 0$ e $\beta_2 = \beta_0 + \alpha = 1$; (ii) para $\alpha = 1 + \beta_0$, as duas velocidades consideradas são $\beta_1 = \beta_0 - \alpha = -1$ e $\beta_2 = \beta_0 + \alpha = 2\beta_0 + 1 = 2$. Assim, no intervalo em que se obtém uma velocidade $|\beta| > 1$, uma das velocidades originais ($\beta_2 = \beta_0 + \alpha$) já era supra-luminosa. Note-se que, para $\alpha > 1 + \beta_0$, tanto β_1 como β_2 são supra-luminosas mas a sua composição $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$ é sub-luminosa.



Em conclusão: a composição relativista (einsteiniana) de velocidades $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$ é, na sua forma, radicalmente diferente da adição pré-relativista (galileana/newtoniana) $\beta = \beta_1 + \beta_2$. A composição relativista de duas velocidades sub-luminosas gera sempre uma velocidade (também) sub-luminosa. Porém, se (pelo menos) uma das velocidades é supra-luminosa, o resultado da composição relativista pode ser (embora não necessariamente) uma velocidade supra-luminosa.

Na realidade, na nova física relativista, nenhum sinal físico se pode transmitir com uma velocidade supra-luminosa. Como se verá na secção seguinte, o princípio da causalidade poderia ser – no caso geral – inválido, caso se admita a possibilidade de propagação supra-luminosa da informação no nosso cosmos.

8. Causalidade

Um problema importante é o da *causalidade*, a saber: em que circunstâncias é que um dado acontecimento **A** pode ser considerado como a *causa* de um outro acontecimento **B**? Por exemplo: um fóton, criado em **A**, propaga-se (obviamente com velocidade $c = 1$, em unidades geométricas) até **B**, aí dando origem a um par electrão-positrão (i.e., $\gamma \rightarrow e^- + e^+$). Claramente podemos dizer, neste caso, o seguinte: o acontecimento **A** foi a causa do acontecimento **B**.

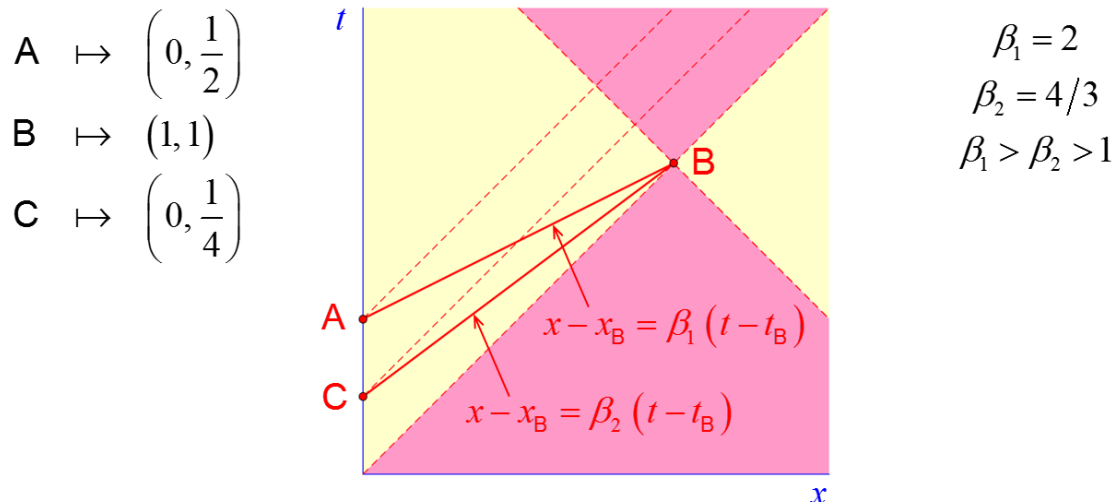
Vejamos, agora, uma situação que não podemos considerar válida: uma partícula é criada no acontecimento **A**, viaja com uma velocidade supra-luminosa até ao acontecimento **B**, onde é reflectida de volta para um acontecimento **C**, no *passado* de **A** mas na mesma equiloc de **A**. Assim, depois da partícula viajar para o seu passado (no acontecimento **C**), chega novamente ao acontecimento **A** onde – em vez de viajar novamente para **B** com uma velocidade supra-luminosa – se desintegra, assim contrariando/negando o processo «anterior».

A Fig. 33 ilustra uma tal sucessão contraditória/impossível de acontecimentos.

Figura 33

Nesta figura apresenta-se uma sequência contraditória de acontecimentos. Admitamos que tudo se passa/descreve num dado sistema de coordenadas $S \mapsto (x, t)$. No acontecimento $A \mapsto (x_A, t_A)$ é emitido um sinal supra-luminoso que se propaga ao longo da linha de universo, de equação $x - x_B = \beta_1 (t - t_B)$, até chegar ao acontecimento $B \mapsto (x_B, t_B)$. Como este sinal, que transporta a informação relevante, é um sinal supra-luminoso, tem-se $\beta_1 > 1$. No nosso diagrama de Minkowski, considerou-se $\beta_1 = 2$. No acontecimento **B** a informação é reflectida de volta para o acontecimento $C \mapsto (x_C, t_C)$, no passado de $A \mapsto (x_A, t_A)$, i.e., com $t_C < t_A$. Note-se que os acontecimentos $A \mapsto (x_A, t_A)$ e $C \mapsto (x_C, t_C)$ pertencem à mesma equiloc de $S \mapsto (x, t)$: na nossa figura considerou-se $x_A = x_C = 0$. A informação, neste segundo percurso, percorre então a linha de universo cuja equação é $x - x_B = \beta_2 (t - t_B)$. Na figura considerou-se $\beta_2 = 4/3 > 1$ (i.e., trata-se, novamente, de um sinal supra-luminoso). Podemos, agora, criar uma história impossível (mas compatível) com esta sequência de acontecimentos: em $x = 0$ uma corrida de cavalos tem início em $C \mapsto (x_C, t_C)$ e termina em $A \mapsto (x_A, t_A)$. Ou seja: a duração da corrida é $\Delta t = t_A - t_C$. Alice (que se encontra em $x = 0$) envia, através do sinal de velocidade β_1 , de $A \mapsto (x_A, t_A)$ até $B \mapsto (x_B, t_B)$, a informação para Bob (que se encontra em $x = x_B$) onde indica qual o cavalo que ganhou a corrida. Por sua vez, assim que se recebe essa informação, Bob reenvia (através do sinal de velocidade β_2) de volta para Alice – i.e.,

de $B \mapsto (x_B, t_B)$ para $C \mapsto (x_C, t_C)$ – a informação que tinha previamente recebido de Alice. Assim, Alice pode apostar no cavalo ganhador e, desta forma, ganhar eventualmente uma fortuna...



A conclusão é a seguinte: a existência de sinais supra-luminosos permite violar a causalidade. Logo, de forma a evitar esta violação, temos de impor uma restrição: *não é possível a propagação de informação com velocidades supra-luminosas.*

Sublinhe-se o seguinte: em relatividade restrita a relatividade da simultaneidade (já) implica que um mesmo conjunto de acontecimentos possa ser interpretado como duas sequências diversas de acontecimentos por dois referenciais de inércia distintos. A figura seguinte (Fig. 34) ilustra isso mesmo.

Figura 34

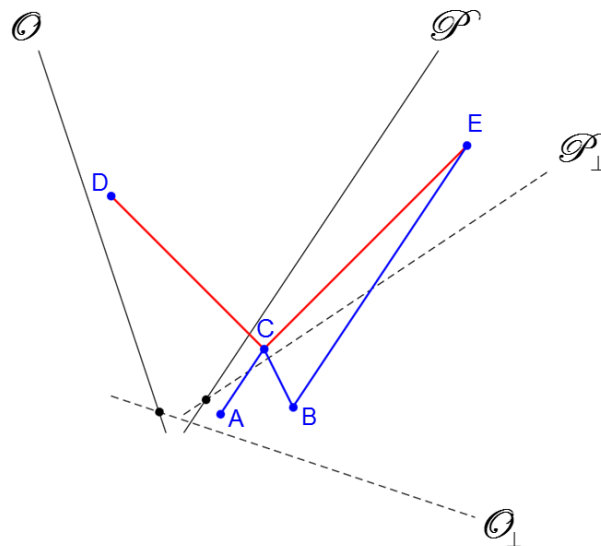
Nesta figura apresenta-se um conjunto de cinco acontecimentos: $\{A, B, C, D, E\}$. Estes acontecimentos são os seguintes: em A é criada uma partícula que se desloca até C ; em B são criadas duas partículas; uma das partículas criada em B desloca-se até C onde colide com a partícula proveniente de A ; a outra partícula criada em B desloca-se até E ; a colisão de duas partículas, que se observa no acontecimento C , provoca a aniquilação mútua dessas duas partículas e a consequente emissão de dois fótons; um dos fótons criados na colisão C desloca-se até D onde desaparece; o outro fóton criado em C desloca-se até E onde é absorvido pela partícula proveniente de B . Este conjunto de acontecimentos é analisado por dois observadores distintos caracterizados pelas equiloques $\{\mathcal{O}, \mathcal{P}\}$. Na figura apresentam-se duas equitemps: (i) a equitemp \mathcal{O}_\perp do observador \mathcal{O} ; (ii) a

equitemp \mathcal{P}_\perp do observador \mathcal{P} . A sequência de equitemps, paralelas entre si, de um dado observador determina a história (i.e., a sequência de acontecimentos) construída por esse mesmo observador sobre o conjunto de acontecimentos em análise. Porém, dado que \mathcal{O}_\perp e \mathcal{P}_\perp não são paralelas entre si (a simultaneidade é um conceito relativo), cada observador vai contar uma história diferente. De acordo com o observador \mathcal{O} a sequência de acontecimentos é a seguinte:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E.$$

Porém, de acordo com o observador \mathcal{P} , a sequência de acontecimentos é outra:

$$B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D.$$

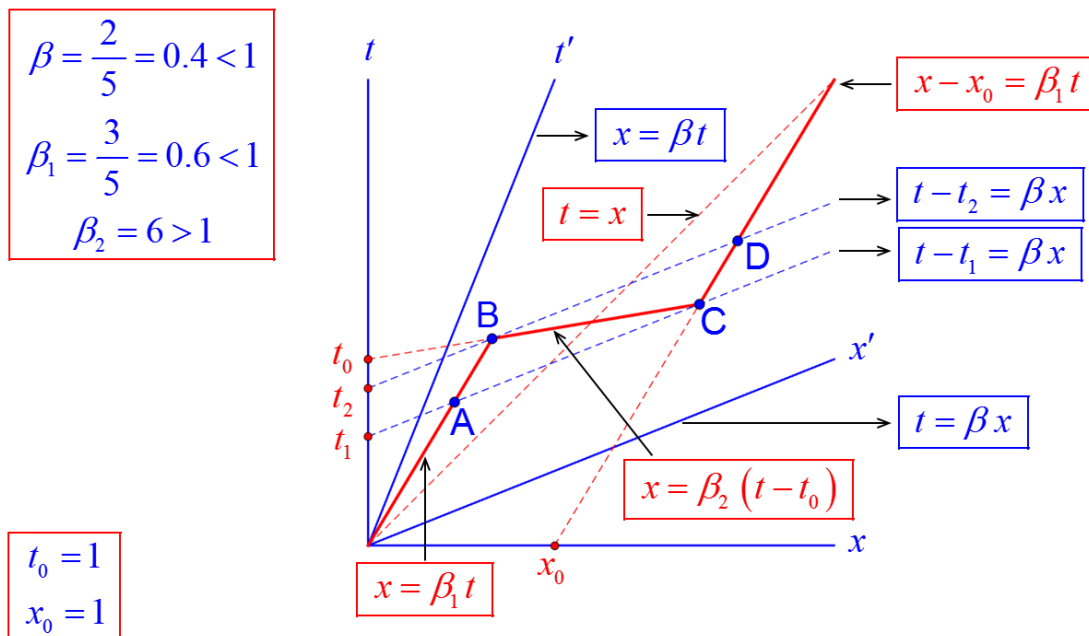


Não obstante existirem estas duas versões diferentes dos acontecimentos nenhuma velocidade interveniente é supra-luminosa e, portanto, não é violada a causalidade (por exemplo: em nenhuma versão C é anterior a A ou a B; também, em nenhuma versão, C é posterior a D ou a E).

Algo diferente ocorre quando intervêm velocidades supra-luminosas como no caso da próxima figura – a Fig. 35. A causalidade pode, neste caso, ser violada.

Figura 35

Nesta figura mostra-se como o conceito de causalidade só é compatível se todas as ações físicas se propagarem com velocidades luminosas ou sub-luminosas. Assim que uma velocidade supra-luminosa entra em ação, a causalidade encontra sérios problemas lógicos pela frente.



No referencial $S \mapsto (x, t)$ observa-se a seguinte história: (i) numa primeira parte, uma partícula (proveniente da origem) tem uma linha de universo descrita pela equação $x = \beta_1 t$, com $\beta_1 = 3/5 < 1$, até ao acontecimento B ; (ii) numa segunda parte, essa mesma partícula desloca-se do acontecimento B até ao acontecimento C seguindo a linha de universo descrita pela equação $x = \beta_2 (t - t_0)$, com $\beta_2 = 6 > 1$; (iii) numa terceira parte, finalmente, a partícula retoma a velocidade da primeira parte a partir do acontecimento C, seguindo a linha de universo descrita pela equação $x - x_0 = \beta_1 t$, novamente com $\beta_1 = 3/5 < 1$. Note-se que o acontecimento A integra a primeira parte do percurso da partícula e que o acontecimento D integra a terceira parte do percurso da partícula. Porém, qual é a história que conta o observador próprio do novo referencial $S' \mapsto (x', t')$ que se afasta de $S \mapsto (x, t)$ com velocidade $\beta = 2/5 < 1$? Vejamos. Antes de prosseguir: apenas na segunda parte da história precedente é que a «nossa» partícula está animada de uma velocidade supra-luminosa. Mais: de acordo com o primeiro postuladado de Einstein, todos os referenciais de inércia são igualmente aptos para descreverem a física. Na segunda história – que se vai revelar profundamente diferente da primeira, embora sobre os mesmos acontecimentos – o instrumento essencial é a nova família de equitemps, todas paralelas ao eixo x' cuja equação é $t = \beta x$ onde, como se viu atrás, $\beta = 2/5 < 1$. Começemos, então, o novo relato. Existe uma partícula, que se desloca da esquerda para a direita, mas que colide, no acontecimento B, com uma *outra* partícula que se desloca da direita para a esquerda. Essa colisão dá origem à mútua aniquilação das duas partículas. De onde vem a segunda partícula? No acontecimento C (que é, agora, simultâneo com o acontecimento A) são criadas (do nada) duas partículas – uma desloca-se para a esquerda (é a tal partícula que se destrói, por colisão, no acontecimento B) e a outra desloca-se para a direita (a este percurso pertence o acontecimento D que ocorre simultaneamente com o acontecimento colisão em B). Ou seja: nesta segunda história

participam três partículas (só existia uma única partícula na primeira história), existe uma colisão com aniquilação mútua de duas dessas partículas, aparecem duas partículas do nada e, por fim, a terceira partícula continua a sua linha de universo de forma imperturbável... Tudo isto acontece porque existe uma velocidade supra-luminosa. Na história contada por $S \mapsto (x, t)$ essa velocidade tinha o valor (em unidades geométricas) $\beta_2 = 6 > 1$. Do ponto de vista de $S' \mapsto (x', t')$, qual é a velocidade β_x da segunda partícula (que se desloca da esquerda para a direita até à colisão e aniquilamento do acontecimento **B**)? Se usarmos a lei da composição de velocidades, anteriormente deduzida, vem

$$\beta_2 = \beta \oplus \beta_x = \frac{\beta + \beta_x}{1 + \beta \beta_x} \mapsto \beta_x = \frac{\beta_2 - \beta}{1 - \beta_2 \beta} = -4 \quad \therefore |\beta_x| = 4 > 1.$$

Coloca-se, por fim, uma questão: são mesmo todas as velocidades supra-luminosas proibidas? A resposta é: não. Existem velocidades que são efectivamente supra-luminosas mas, no entanto, nenhuma acção física se propaga com velocidade supra-luminosa. Estas velocidades existem e são, até, observáveis experimentalmente.

Comecemos por indicar um exemplo conhecido de quem estuda a propagação de ondas electromagnéticas em guias metálicos fechados: no guia de secção rectangular, por exemplo, a velocidade de fase v_p de um dado modo com frequência de corte f_c e operado à frequência $f > f_c$ (com dieléctrico ar) é supra-luminosa:

$$\frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > 1.$$

Mas, se não houver perdas, a velocidade dos sinais (i.e., da energia) que se propagam neste guia de ondas é dada pela velocidade de grupo v_g , com $v_p v_g = c^2$, i.e., tem-se (para $f > f_c$)

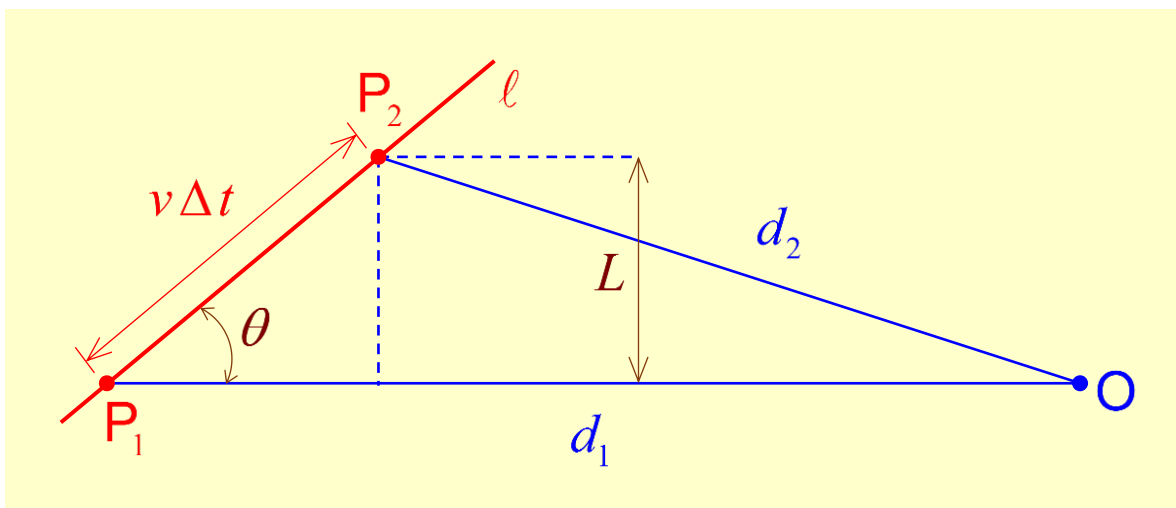
$$\frac{v_g}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < 1$$

que é, portanto, uma velocidade sub-luminosa.

Na figura seguinte, a Fig. 36, apresenta-se um outro exemplo conhecido da astronomia.

Figura 36

Nesta figura, apesar de nem a luz nem os materiais envolvidos se propagarem com velocidades maiores do que c , é criada uma *impressão visual* – junto de um observador longínquo – que existe uma propagação supra-luminosa. Considera-se que, eventualmente em resultado de uma explosão estelar, uma certa quantidade de material luminoso se propaga ao longo da recta ℓ , com velocidade v , no sentido $P_1 \rightarrow P_2$. No instante t_1 o material encontra-se no ponto P_1 e, no instante t_2 , no ponto P_2 . A recta ℓ tem uma inclinação θ em relação à direcção P_1O que liga o ponto $P_1 \in \ell$ a um observador longínquo O que se encontra a uma distância d_1 (eventualmente no planeta Terra).



Passado um intervalo de tempo Δt , o material estelar que se encontrava em $P_1(t_1)$ encontra-se, agora, em $P_2(t_2)$, com $t_2 = t_1 + \Delta t$, tendo percorrido a distância $v \Delta t$. No entanto, o observador longínquo, situado no ponto O , regista uma velocidade transversal u aparente em que o material parece progredir, na direcção perpendicular a P_1O , uma distância $L = v \sin(\theta) \Delta t$ num intervalo de tempo T , tal que (unidades SI)

$$T = \left(t_2 + \frac{d_2}{c} \right) - \left(t_1 + \frac{d_1}{c} \right) = (t_2 - t_1) - \left(\frac{d_1 - d_2}{c} \right) = \Delta t - \frac{d_1 - d_2}{c}.$$

Admitindo a aproximação segundo a qual a direcção P_2O é, na prática, quase paralela a P_1O , podemos escrever

$$d_1 - d_2 = v \cos(\theta) \Delta t.$$

Assim, infere-se que

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}} \mapsto \boxed{T = [1 - \beta \cos(\theta)] \Delta t}.$$

Daqui resulta que a tal velocidade (aparente) transversal u , que o observador regista, é dada por

$$u = \frac{L}{T} = \frac{v \sin(\theta) \Delta t}{[1 - \beta \cos(\theta)] \Delta t} \mapsto \boxed{u(\beta, \theta) = c \frac{\beta \sin(\theta)}{1 - \beta \cos(\theta)}}.$$

Desta última equação obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = c \frac{[1 - \beta \cos(\theta)][\beta \cos(\theta)] - [\beta \sin(\theta)]^2}{[1 - \beta \cos(\theta)]^2} = 0 \mapsto \beta \cos(\theta) - \beta^2 = 0.$$

Ou seja: o máximo desta velocidade transversal ilusória u_{\max} ocorre para um ângulo θ_0 tal que

$$\boxed{\cos(\theta_0) = \beta} \mapsto \sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma}.$$

Portanto, vem

$$u_{\max} = u(\beta, \theta_0) = c \frac{\beta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \mapsto \boxed{\frac{u_{\max}}{c} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \beta}.$$

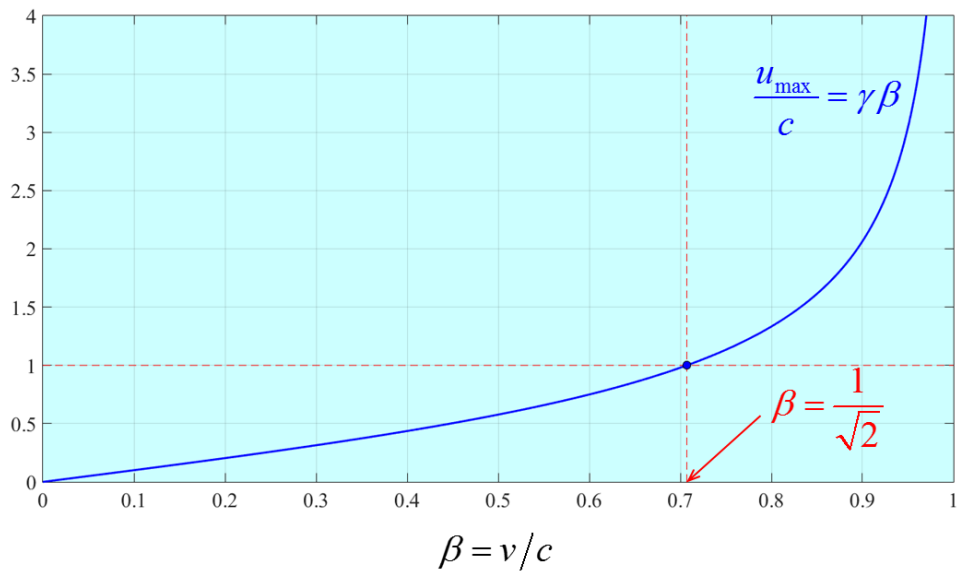
Em particular, obtém-se

$$\boxed{\lim_{v \rightarrow c} (u_{\max}) = \infty}.$$

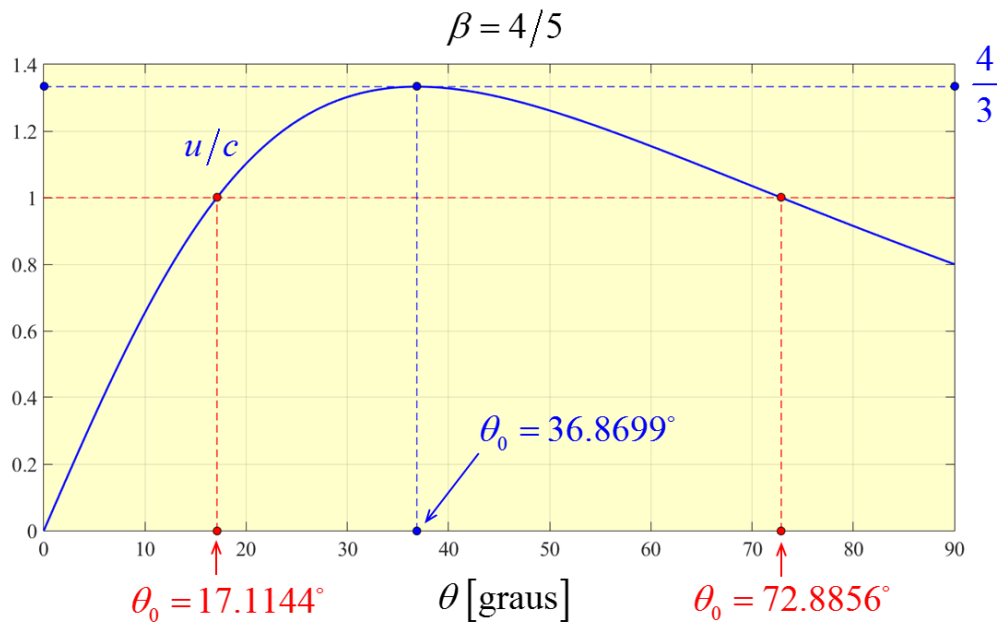
De facto, esta velocidade u_{\max} ultrapassa a velocidade da luz (no vácuo) desde que

$$\frac{u_{\max}}{c} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \mapsto \boxed{\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

A figura anexa da página seguinte mostra a variação de u_{\max}/c no intervalo $0 \leq \beta < 1$ (em que, portanto, a matéria estelar se desloca com uma velocidade $v = \beta c < c$). Assim, não obstante nenhuma partícula (fotão ou partícula da matéria estelar) se deslocar com uma velocidade supra-luminosa, o valor máximo da velocidade u (com que o observador vê a luz a expandir-se num círculo centrado em O sobre o plano perpendicular à direcção $P_1 O$), u_{\max} , ultrapassa efectivamente o valor c – desde que a matéria estelar em expansão se desloque com uma velocidade $v > c/\sqrt{2} \approx 0.7071c$. Note-se que, para $\beta = 1/\sqrt{2}$, vem $\theta_0 = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$.



A figura, que se anexa a seguir, ilustra a variação de $u(\beta, \theta)$ para $\beta = 4/5 = 0.8$ e quando $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

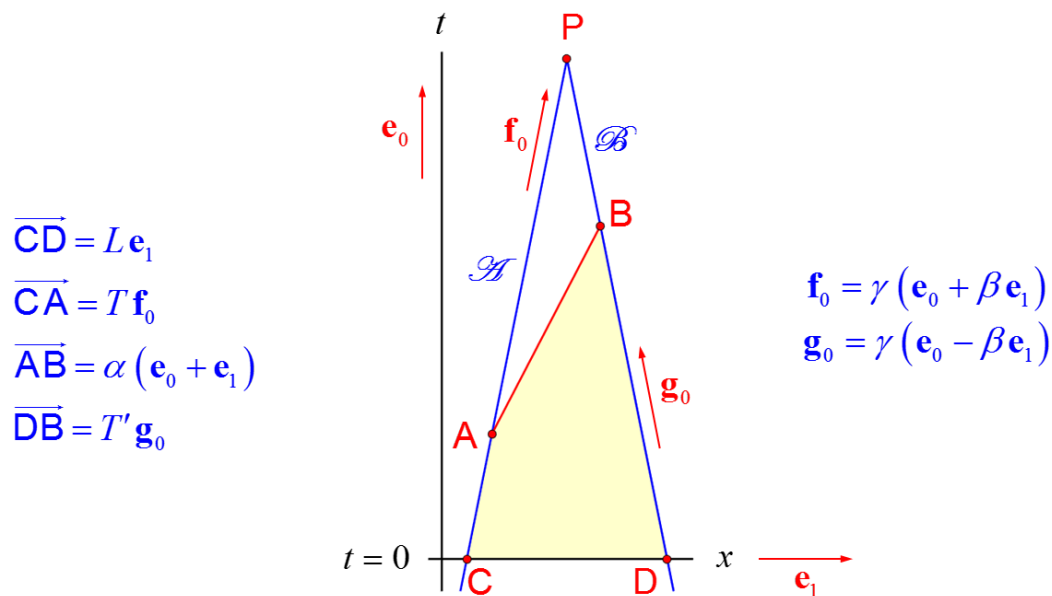


9. Interregno para dois problemas resolvidos

Nesta secção vai-se parar a exposição normal da teoria para apresentar dois problemas resolvidos. O objectivo é o de mostrar dois exemplos de aplicação (quase) imediata da teoria entretanto desenvolvida.

Primeiro Problema – Na superfície da Lua dois foguetões aproximam-se um do outro na direcção horizontal. Do ponto de vista da Lua os dois foguetões \mathcal{H} e \mathcal{B} deslocam-se, ambos, com uma velocidade β em sentidos diametralmente opostos. Quando o relógio da Lua marca $t=0$ os dois foguetões encontram-se (do ponto de vista da Lua) a uma distância L e os respectivos relógios (também) marcam zero. Quando o relógio de \mathcal{H} marca T é emitido um sinal electromagnético de \mathcal{H} em direcção a \mathcal{B} (sentido x positivo). Qual é o tempo T' que o relógio de \mathcal{B} indica quando este sinal chega a \mathcal{B} ?

Resolução – O primeiro passo consiste em construir um diagrama de Minkowski que illustre a resolução do problema em questão. Só depois é que se passa à parte analítica propriamente dita. A figura anexa contém o diagrama de Minkowski que permite resolver este problema.



Pretende-se, apenas, determinar o tempo T' em termos da velocidade relativa β bem como do tempo T e da distância L . Do quadrilátero ABCD da figura, obtém-se a identidade vectorial

$$\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CA} + \overline{AB} \Rightarrow T' \mathbf{g}_0 = -L \mathbf{e}_1 + T \mathbf{f}_0 + \alpha (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1).$$

O valor α é aqui desconhecido – mas é irrelevante para a resolução deste problema. Notemos, com efeito, que

$$(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0^2 + 2(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_1^2 = 0,$$

dado que $\mathbf{e}_0^2 = 1$, $\mathbf{e}_1^2 = -1$ e $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Mas, não podia deixar de ser de outra forma: como \overline{AB} é um sinal electromagnético, o seu intervalo (de espaço-tempo) é necessariamente nulo. Portanto, se fizermos o produto interno de ambos os membros da nossa primeira equação por $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, obtém-se

$$T' \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = -L \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + T \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + \alpha (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)^2$$

$$\therefore T' \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = -L \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + T \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \Rightarrow T' \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) = L + T \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1).$$

Logo, como

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{g}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 - \beta \mathbf{e}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma \\ \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = -\gamma \beta \\ \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma \\ \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = \gamma \beta \end{cases}$$

infere-se que

$$\gamma (1 + \beta) T' = L + \gamma (1 - \beta) T$$

$$\therefore T' = \frac{1}{\gamma (1 + \beta)} L + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} T.$$

A solução pretendida é, assim,

$$T' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} L + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} T,$$

já que

$$\frac{1}{\gamma (1 + \beta)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Como é óbvio este resultado reduz-se a $T' = L + T$ no caso particular em que $\beta = 0$ (mas, neste caso, o acontecimento P do nosso diagrama de Minkowski jamais ocorreria pois $t_p \rightarrow \infty$). No referencial da Lua o acontecimento P tem coordenadas

$$x_p = \frac{1}{2}(x_c + x_D) = x_c + \frac{L}{2}, \quad t_p = \frac{L}{2\beta}.$$

Só para ilustrar um pouco mais este método vamos determinar, também, a constante α que aparece no vector $\overline{AB} = \alpha(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$ – apesar de isso ser completamente irrelevante para a solução encontrada. Voltemos, então, à primeira equação

$$T' \mathbf{g}_0 = -L \mathbf{e}_1 + T \mathbf{f}_0 + \alpha(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1).$$

Notemos, agora, que

$$(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0^2 - \mathbf{e}_1^2 = 2.$$

Então, vem sucessivamente

$$T' \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = -L \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) + T \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) + \alpha(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1)$$

$$\therefore \gamma(1 - \beta)T' = -L + \gamma(1 + \beta)T + 2\alpha.$$

Ou seja,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ L + \gamma \left[(1 - \beta)T' - (1 + \beta)T \right] \right\}.$$

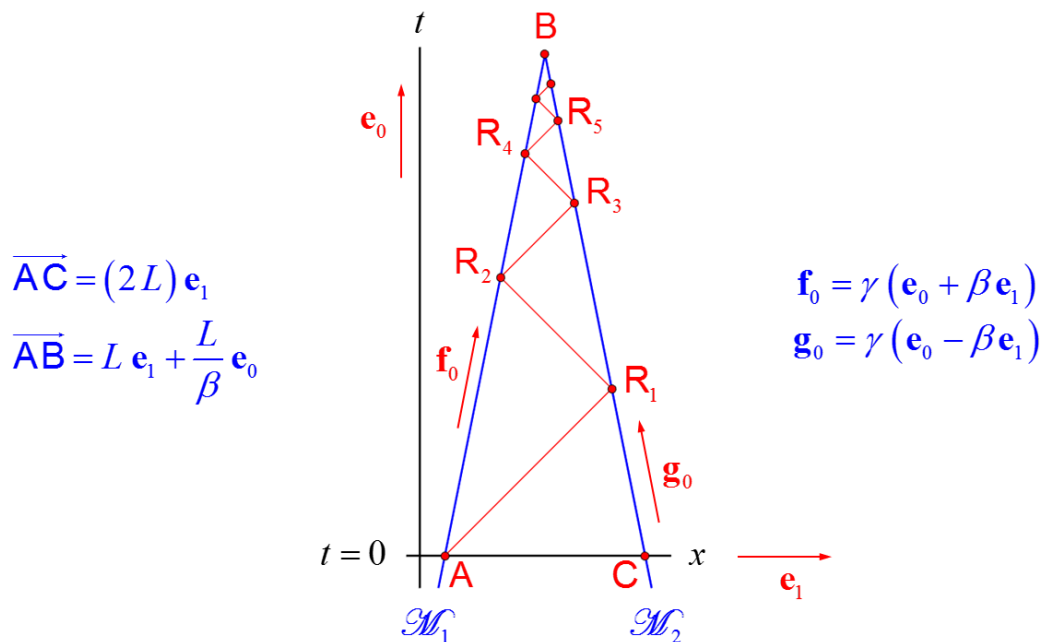
Se se substituir nesta última equação a expressão obtida para T' , ainda vem (depois de alguma manipulação algébrica)

$$\alpha = \frac{1}{1 + \beta} \left(L - \frac{2\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} T \right).$$

No caso limite em que $\beta = 0$ esta expressão reduz-se ao resultado óbvio $\alpha = L$.

Segundo Problema – Dois espelhos planos, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 , permanecem paralelos e aproximam-se um do outro – cada qual com uma velocidade (normalizada) β do ponto de vista do referencial do LAB (laboratório). Quando, do ponto de vista do LAB, o relógio marca $t = 0$, a separação entre \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 é $2L$ (medida pelo LAB). Nesse mesmo instante, $t = 0$, um feixe laser deixa o espelho \mathcal{M}_1 em direcção a \mathcal{M}_2 . Esse feixe sofre sucessivas reflexões entre \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 até que os espelhos colidem. Determine a distância total percorrida pelo feixe do ponto de vista do referencial onde \mathcal{M}_2 se encontra em repouso.

Resolução – Como sempre o primeiro passo consiste em construir o correspondente diagrama de Minkowski – tal como se indica na figura anexa seguinte.



O feixe é emitido, a partir de \mathcal{M}_1 , no acontecimento A (em $t=0$ no referencial do LAB). Sofre sucessivas reflexões em R_1, R_2, R_3, \dots , até que se dá a colisão entre os dois espelhos – no acontecimento B. O tempo decorrido (no referencial próprio de \mathcal{M}_1) entre o acontecimento inicial A e o acontecimento final B é lido na equiloc caracterizada pelo vector unitário \mathbf{f}_0 . Como $c=1$, o espaço percorrido é numericamente igual ao tempo decorrido, i.e., ao comprimento do vector \overline{AB} . Em termos do referencial próprio de \mathcal{M}_2 o tempo decorrido entre A e B é T (lido sobre a equiloc caracterizada pelo vector unitário \mathbf{g}_0). Neste novo referencial o espaço percorrido é $D=T$ (novamente porque $c=1$), tendo-se então

$$D = T = \mathbf{g}_0 \cdot \overline{AB}.$$

Logo, como $\mathbf{g}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 - \beta \mathbf{e}_1)$ e

$$\overline{AB} = L \mathbf{e}_1 + \frac{L}{\beta} \mathbf{e}_0 = \frac{L}{\beta} (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1) = \frac{L}{\gamma \beta} [\gamma (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1)] = \frac{L}{\gamma \beta} \mathbf{f}_0,$$

infere-se que

$$D = \mathbf{g}_0 \cdot \overline{AB} = \frac{L}{\gamma \beta} (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{g}_0).$$

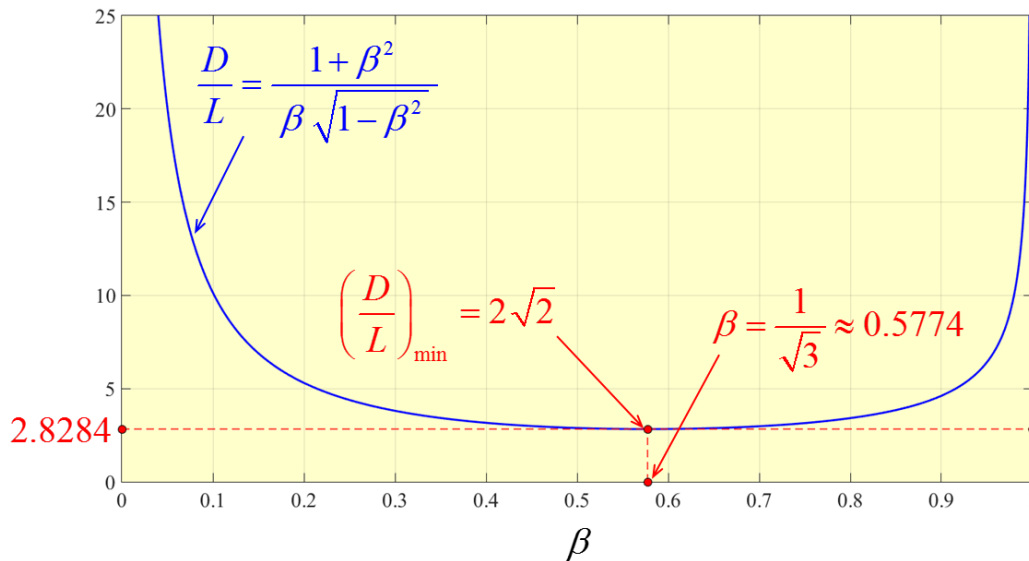
Porém, tem-se

$$\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{g}_0 = [\gamma (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1)] \cdot [\gamma (\mathbf{e}_0 - \beta \mathbf{e}_1)] = \gamma^2 (\mathbf{e}_0^2 - \beta^2 \mathbf{e}_1^2) = \gamma^2 (1 + \beta^2).$$

Conclui-se, deste modo, que será

$$D = \frac{\gamma L}{\beta} (1 + \beta^2) \Rightarrow \boxed{D = \frac{1 + \beta^2}{\beta \sqrt{1 - \beta^2}} L}.$$

Claro está que, no caso limite em que $\beta \rightarrow 0$, não haverá colisão e o feixe continuará indefinidamente a percorrer o espaço entre os dois espelhos: $D \rightarrow \infty$. A figura que se anexa a seguir apresenta a variação de D/L com a velocidade β de cada espelho em relação ao LAB.



10. O paradoxo da vara e do celeiro

Na teoria da relatividade restrita existe uma numerosa colecção de exemplos habitualmente designados como «paradoxos». Ora, o termo paradoxo está associado a situações onde ocorrem contradições lógicas. Logo, estes exemplos da relatividade restrita não deveriam ser designados, em rigor, desta forma – daí as aspas: é que, de facto, nada existe de contraditório na sua lógica. O que ocorre é, pura e simplesmente, um choque em relação ao senso ou intuição comuns. Assim, nada disto deve causar estranheza: quase todos os resultados mais importantes da relatividade restrita correspondem a um desvio em relação ao senso comum. Na realidade eles radicam na negação de algo (o tempo absoluto) que parece intuitivo – embora falso (a simultaneidade é, de facto, um conceito relativo).

Nesta secção aborda-se o chamado paradoxo da vara e do celeiro. Consiste, basicamente, no seguinte: Alice corre, com uma vara na mão, disposta paralelamente ao solo, em direcção à porta de um celeiro vazio. No referencial de Alice a vara tem um comprimento ℓ_0 (dito próprio, pois é medido no mesmo referencial em que a vara está em repouso). O celeiro, por sua vez, tem um comprimento (também) próprio L_0 . Mas então, se se admitir que $\ell_0 > L_0$, alguém que não conheça a teoria da relatividade dirá – em concordância com o senso comum – que a vara não cabe dentro do celeiro. Para concretizar o nosso raciocínio admitamos, então, que $\ell_0 = 4\sqrt{2}/5 \approx 1.1314$ e que $L_0 = 1$. E, para evitar problemas técnicos espúrios (em relação à essência do que está em causa), vamos estabelecer o seguinte:

- Existem duas portas no celeiro – uma porta dianteira (por onde Alice entra) e outra porta traseira (por onde Alice deverá sair);
- Cada porta abre-se assim que a vara da Alice aí se encontra (através de um mecanismo que, para o efeito aqui em discussão, transcende e é desnecessário para esta análise).

Ou seja, por outras palavras: não será sobre um mero problema técnico – associado à abertura ou ao fecho das duas portas – que assentará a nossa discussão sobre se a vara cabe (ou não) dentro do celeiro. Mas comecemos por ver este problema na perspectiva de alguém com um conhecimento reduzido (e, na verdade, pouco esclarecido) da relatividade restrita. O raciocínio desta pessoa poderia ser assim: como a Alice está a correr (em relação ao celeiro) o referencial do celeiro vê a vara mais curta – em resultado da contracção do espaço. Logo, pode acontecer que – apesar de tudo – a vara caiba dentro do celeiro. Admitamos, para concretizar, que a velocidade do movimento relativo entre Alice e o celeiro seja $\beta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ (em unidades geométricas, com $c = 1$). Logo, nestas circunstâncias, será $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{2} \approx 1.4142$ e a vara terá, efectivamente, um comprimento ℓ mais curto no referencial do celeiro, a saber: $\ell = \ell_0/\gamma = 4/5 = 0.8$ (note-se que a Alice mantém, sempre, a mesma velocidade constante tanto no exterior como no interior do celeiro). Portanto, o nosso interlocutor ingénuo (e hipotético) poderá dizer: a vara cabe dentro do celeiro, pois

$\ell = 0.8 < L_0 = 1$. O problema está resolvido – dirá, ainda, esse interlocutor ingénuo, sem mais preocupações. Todavia, será que tudo fica, assim, completamente esclarecido?

É nesta altura que nós temos de intervir: temos de lembrar, ao nosso interlocutor ingénuo, que a contração do espaço é um *efeito recíproco*. Ou seja, mais precisamente: se a vara aparece contraída em relação ao celeiro (do ponto de vista do celeiro), também o celeiro se encontra contraído (em relação ao seu comprimento próprio, no referencial da Alice). Donde, tendo em conta a reciprocidade, tudo parece apontar para que – no referencial de Alice (ou seja, no referencial próprio da vara) – o celeiro tenha um comprimento $L = L_0 / \gamma = 1 / \sqrt{2} \approx 0.7071$. Mas isto revela-se *muito* problemático: é que, no referencial da Alice, o comprimento da vara é $\ell_0 = 4\sqrt{2}/5 \approx 1.1314$ (o seu comprimento próprio). Portanto: não existe forma alguma de, no referencial da Alice, a vara caber dentro do celeiro, uma vez que $\ell_0 > L$. Assim, existe aqui um paradoxo (pelo menos *aparente*):

- No referencial do celeiro a vara deverá caber porque se tem $\ell < L_0$;
- No referencial da Alice a vara não poderá caber porque $\ell_0 > L$.

Esta contradição – a ser uma verdadeira contradição lógica – poderá fazer com que o nosso interlocutor ingénuo ache (razoavelmente) que, afinal, parece haver algo de errado na teoria da relatividade. Ou será que não? Será possível que, ainda assim, a teoria continue a fazer sentido?

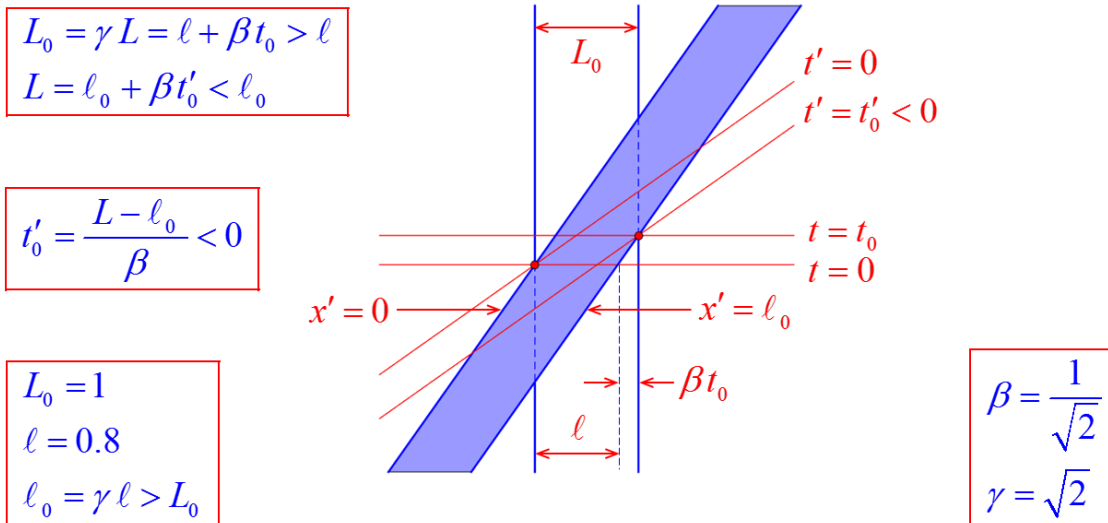
Aqui chegados, através de uma visão essencialmente naïve da relatividade restrita, temos de recorrer a uma análise mais sofisticada. E, para o fazer, vamos recorrer a um diagrama de Minkowski – tal como o que se apresenta na Fig. 37 – de forma a clarificar toda esta situação.

Figura 37

Na figura da página seguinte apresenta-se um diagrama de Minkowski que esclarece o que (realmente) se passa no «paradoxo» da vara e do celeiro. Usam-se coordenadas (x, t) para o referencial do celeiro e coordenadas (x', t') para o referencial da Alice. Neste diagrama o celeiro é representado pela região do espaço-tempo compreendida entre as equilocs verticais $x = 0$ (porta dianteira) e $x = L_0$ (porta traseira) em relação ao referencial do celeiro. Neste mesmo referencial estão (também) representadas duas equitemps (horizontais): uma em $t = 0$ e a outra em $t = t_0 = \sqrt{2}/5 > 0$. Note-se que se tem $L_0 = \gamma L = \ell + \beta t_0 > \ell$. Por sua vez, a vara corresponde à região sombreada do espaço-tempo entre as equilocs de Alice $x' = 0$ (i.e., (i.e., $x = \beta t$)) e $x' = \ell_0$ (i.e., $x = \beta t + \ell$). Também estão representadas, neste diagrama de Minkowski, duas equitemps de Alice – a equitemp $t' = 0$ e a equitemp $t' = t'_0 = -3/5 < 0$. Em termos das coordenadas (x, t) do celeiro, a equitemp $t' = 0$ corresponde a $t = \beta x$ enquanto que a outra equitemp $t' = t'_0 < 0$ corresponde a $t - t_0 = \beta(x - L_0)$.

Nas equilocs do celeiro $x=0$ (porta dianteira) e $x=L_0$ (porta traseira) aparecem dois segmentos de recta a tracejado – precisamente as partes dessas mesmas rectas (verticais) que coincidem com a zona do espaço-tempo a sombreado correspondente à vara. Pretende-se, deste modo, que as duas portas do celeiro não tenham qualquer interferência espúria sobre o movimento da vara – tal como já foi referido anteriormente.

A vara e o celeiro



O problema com a interpretação «paradoxal» do nosso interlocutor ingénuo (que aplicou de forma grosseira a reciprocidade da contracção do espaço) é o seguinte: não é possível dizer, *dada a extensão espacial do celeiro* no referencial da Alice, que todos os pontos do celeiro pertencem à mesma equitemp (de Alice). Analogamente: *dada a extensão espacial da vara*, no referencial do celeiro, diferentes pontos da vara pertencem a diferentes equitemps (do celeiro). Do ponto de vista do referencial do celeiro existe, de facto, um intervalo de tempo, $0 < t < t_0$, em que a vara se encontra (totalmente) dentro do celeiro. Mas, dada a relatividade da simultaneidade, o mesmo não se passa em relação ao referencial da Alice. Com efeito, do ponto de vista do referencial da Alice, nunca a vara se encontra totalmente dentro do celeiro:

- Na equitemp $t' = t'_0 < 0$ a ponta dianteira da vara já atingiu a porta traseira do celeiro (em $x = L_0$) mas, simultaneamente, a ponta traseira da vara está claramente fora do celeiro (em $x = \gamma \beta t'_0 = -3/5 = -0.6 < 0$);
- Na equitemp $t' = 0$ a ponta traseira da vara já atingiu a porta dianteira do celeiro (em $x = 0$) mas, simultaneamente, a ponta dianteira da vara está claramente fora do celeiro (em $x = \gamma l_0 = 8/5 = 1.6 > L_0 = 1$).

Ou seja: o diagrama de Minkowski mostra que, mesmo no intervalo $t'_0 < t' < 0$ do referencial da Alice, a vara não cabe dentro do celeiro.

Conclusão: o (aparente) paradoxo da vara e do celeiro consiste na aparente contradição entre o facto de a vara caber toda dentro do celeiro, do ponto de vista do celeiro, e, por outro lado, a vara nunca caber toda dentro do celeiro, do ponto de vista da Alice. Mas não há aqui, de facto, qualquer contradição: o que o celeiro entende como *toda* a vara num dado instante (i.e., sobre uma equitemp do celeiro) não coincide – dada a relatividade da simultaneidade – com o que a Alice entende ser *toda* a vara num dado instante (i.e., sobre uma equitemp da Alice).

11. O efeito Doppler e o paradoxo dos gémeos

«Of all the supposed paradoxes engendered by relativity theory, the *twin paradox* (or clock paradox) is the most controversial. It asserts that if one clock remains at rest in an inertial frame, and another, initially agreeing with it, is taken off on any sort of path and finally brought back to the starting point, the second clock will have lost time as compared to the first. In today's parlance, the astronaut will end up by becoming younger than his twin brother.»

Anthony Philip French, *Special Relativity (The M.I.T. Introductory Physics Series)*. New York: W. W. Norton & Company, 1968.

Nesta secção analisa-se o chamado paradoxo dos gémeos (ou dos relógios) através do efeito Doppler – tal como A. P. French (1920-) fez no seu célebre livro escrito para o curso introdutório de Física do MIT (publicado, pela primeira vez, em 1966 e, ainda hoje, um dos melhores livros de introdução à teoria da relatividade restrita). A única diferença é que, hoje em dia, já nenhum cientista sério coloca quaisquer dúvidas sobre a validade do que se vai aqui analisar.

Comecemos por estudar o efeito Doppler *longitudinal* (como o movimento em estudo se processa numa única direcção espacial, não é possível considerar o efeito Doppler transversal). Vejamos, então, a Fig. 38.

Figura 38

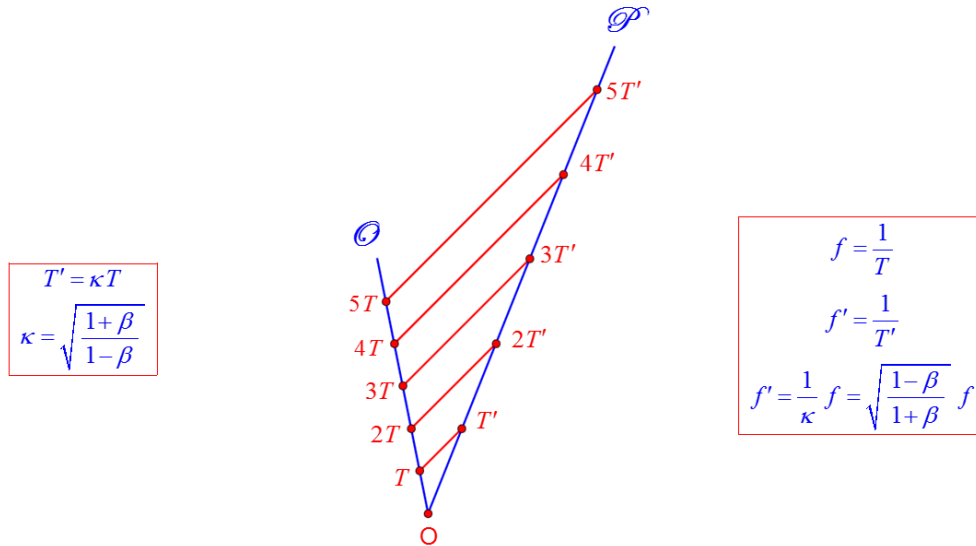
Para deduzir o efeito Doppler longitudinal usa-se o método do radar de Sir Hermann Bondi (1919—2005). Este método baseia-se no factor $\kappa = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$ que já foi introduzido atrás (Fig. 16, pp. 32—33). Considera-se o movimento relativo, com velocidade β , entre dois observadores inerciais \mathcal{O} e \mathcal{O}' . Se o movimento é de afastamento, $\beta > 0$; se o movimento é de aproximação, $\beta < 0$. O observador \mathcal{O} emite periodicamente, com período T , sinais electromagnéticos que são recebidos por \mathcal{O}' , embora com um período T' . Tem-se $T' = \kappa T$, de forma que

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

onde as frequências f e f' são tais que

$$\begin{cases} f = \frac{1}{T}, \\ f' = \frac{1}{T'}. \end{cases}$$

Assim, $f' < f$ (desvio para o vermelho) se o movimento corresponder a um afastamento e $f' > f$ (desvio para o azul) se o movimento corresponder a uma aproximação.



É costume definir

$$z = \frac{f - f'}{f'} = \kappa - 1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$$

como o *factor de desvio para o vermelho* (i.e., tem-se $\kappa = 1 + z$). Para $|\beta| \ll 1$, vem

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = (1 + \beta)^{1/2} (1 - \beta)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \beta\right)^2 = 1 + \beta + \frac{1}{4} \beta^2 \approx 1 + \beta,$$

pelo que

$$z \approx \beta.$$

Vamos, agora, centrar a nossa atenção exclusiva sobre o paradoxo dos gémeos – Alice e Bob, em que Bob é o gémeo que fica na Terra e Alice a gémea astronauta. E, de forma a tornar a nossa análise o mais simples possível, a viagem de Alice consiste, apenas, em duas fases: (i) a viagem de ida; (ii) a

viagem de volta. Mais: em ambas as fases a velocidade é uniforme, de amplitude β . Alice desloca-se, então, na sua nave espacial, afastando-se da Terra até atingir uma distância L (usamos, sempre, unidades geométricas: tempo em anos e distância em anos-luz). Assim que atinge essa distância L , Alice faz (instantaneamente) inversão de marcha, voltando à Terra. Ou seja: existe um único instante, em toda a viagem, em que se admite a existência de aceleração – quando Alice faz inversão de marcha, modificando instantaneamente a sua velocidade de $+\beta$ para $-\beta$ (aceleração instantânea *infinita*). Todavia, este instante (de inversão de marcha) é crucial – ele quebra, definitivamente, qualquer esperança de aplicar a reciprocidade aos dois gémeos. Assim, seja $S_B \mapsto (x, t)$ o referencial de inércia associado a Bob (sempre na Terra) equipado com dois vectores unitários constantes $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$. Todavia, devido à inversão de marcha (com aceleração instantânea infinita), o referencial solidário com Alice, $S_A \mapsto (x', t')$, não pode ser considerado um (único) referencial de inércia. De facto, podemos considerar – se descontarmos o instante da inversão de marcha – que $S_A \mapsto (x', t')$ é composto por dois referenciais de inércia, a saber:

- Um primeiro referencial de inércia, $S_1 \mapsto (x', t')$, correspondente à viagem de ida e equipado com dois vectores unitários constantes $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1)$;
- Um segundo referencial de inércia, $S_2 \mapsto (x', t')$, correspondente à viagem de volta e equipado com dois vectores unitários constantes $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1)$.

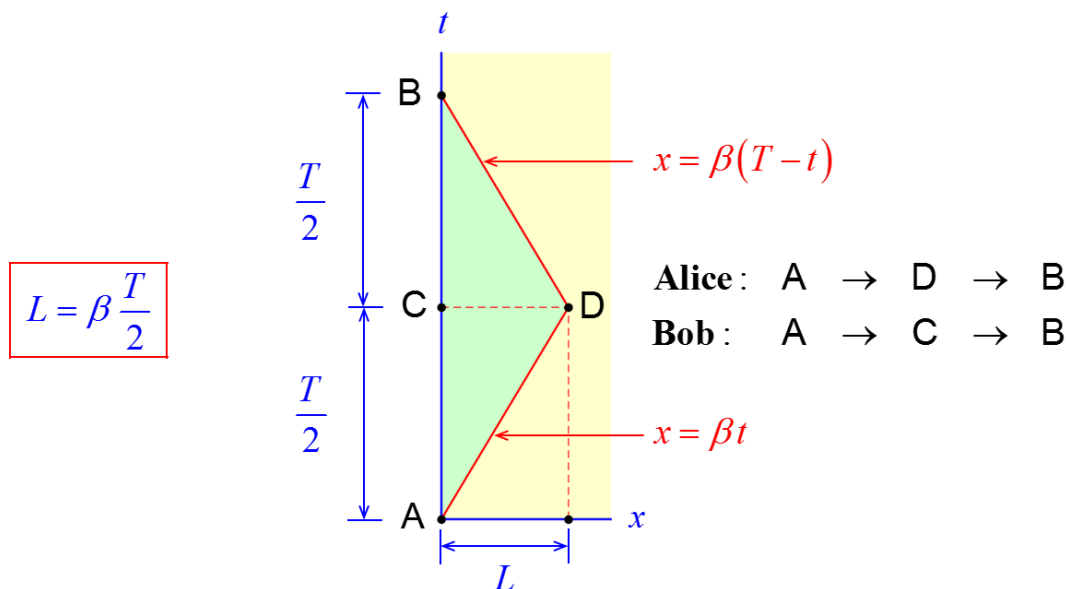
Tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{f}_1 = \gamma (\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_0), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{g}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 - \beta \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{g}_1 = \gamma (\mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_0). \end{cases}$$

A Fig. 39 mostra, num diagrama de Minkowski, as linhas de universo de Bob e de Alice.

Figura 39

Diagrama de Minkowski com as linhas de universo de Bob (vertical) e Alice (duas linhas inclinadas que se encontram aquando da inversão de marcha). De acordo com Bob a viagem de Alice durou um intervalo de tempo T . E, como Alice viajou até uma distância L , tem-se $T = 2L/\beta$. No referencial de inércia $S_B \mapsto (x, t)$ de Bob, a viagem de ida de Alice é descrita pela equação $x = \beta t$ enquanto que a viagem de volta é descrita pela equação $x = \beta (T - t)$. A linha de universo de Bob, correspondente à viagem, é dada pela sequência de acontecimentos $A \rightarrow C \rightarrow B$. A linha de universo de Alice, por sua vez, é dada pela sequência de acontecimentos $A \rightarrow D \rightarrow B$. A inversão de marcha de Alice ocorre no acontecimento D que, do ponto de vista de Bob, é simultâneo com o acontecimento C .



Para comparar a interpretação de Bob com a de Alice ambos os gémeos acordam em enviar para o outro sinais com a mesma frequência f (frequência medida por cada um no seu referencial próprio, onde os sinais são emitidos). Porém, pelo efeito Doppler, se os sinais são emitidos por cada um à frequência não é essa a frequência com que são recebidos pelo outro:

- Na viagem de ida de Alice a frequência sofre um desvio para o vermelho $f \mapsto f' = f / \kappa < f$ dado que existe um afastamento mútuo;
- Na viagem de volta, porém, a frequência sofre um desvio para o azul $f \mapsto f'' = \kappa f > f$ dado que os dois gémeos se estão a aproximar.

De facto, como se viu anteriormente, pelo efeito Doppler tem-se

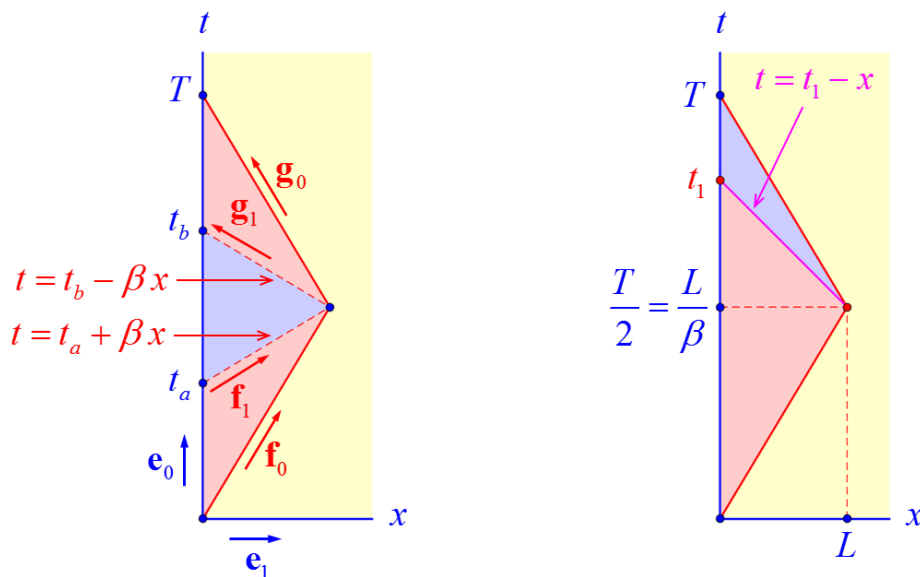
$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < f, \quad f'' = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > f.$$

Na Fig. 40 mostram-se dois diagramas de Minkowski onde se faz uma primeira análise comparativa dos pontos de vista de cada gémeo em relação aos sinais emitidos e recebidos por cada um. Assim, no diagrama da esquerda, mostra-se a consequência – para Alice – da sua inversão de marcha, quando esta muda instantaneamente (no acontecimento D da anterior Fig. 39) de $S_1 \mapsto (x', t') \mapsto (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1)$ para $S_2 \mapsto (x', t') \mapsto (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1)$. No diagrama da direita, incluído também na mesma Fig. 40, indica-se uma consequência da quebra de reciprocidade entre Bob e Alice: Bob, através dos sinais que vai recebendo de Alice, só regista que a sua irmã faz inversão de marcha em $t = t_1 > T/2$, pois é nesse instante,

apenas, que ele recebe o sinal emitido por Alice em D (imediatamente antes dela fazer a inversão de marcha).

Figura 40

Primeira abordagem comparativa entre os pontos de vista de Alice e Bob. Para fixar ideias, considera-se sempre que $\beta = 3/5$ pelo que, conseqüentemente, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 5/4$. Considera-se, doravante, que $T = 10$ anos e que ambos os gêmeos têm 30 anos quando se inicia a viagem. Ou seja: Bob, quando finalmente se reencontra com Alice, tem 40 anos.



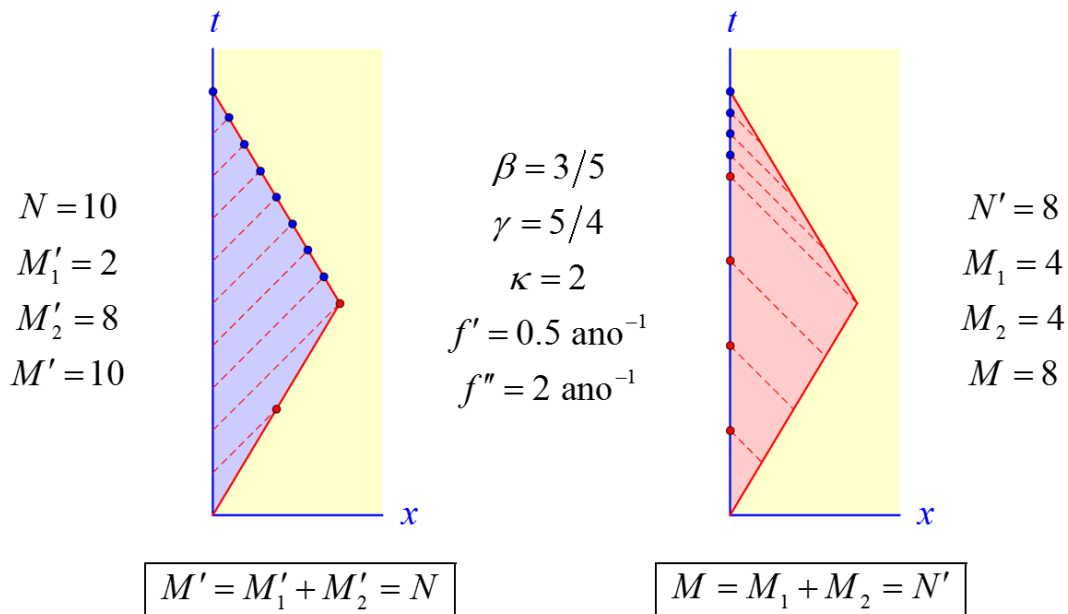
No diagrama do lado esquerdo mostra-se que, na inversão de marcha (acontecimento D da Fig. 39), Alice muda instantaneamente de $S_1 \mapsto (x', t') \mapsto (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1)$ para $S_2 \mapsto (x', t') \mapsto (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1)$. Bob, porém, permanece sempre em $S_B \mapsto (x, t) \mapsto (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$. Ou seja, no acontecimento D as equitemps de Alice mudam instantaneamente de direcção – antes a equitemp que passa em D intersecta o eixo do tempo de Bob no instante $t_a = (1-\beta^2)(T/2)$ e, imediatamente depois, a equitemp que passa em D intersecta o eixo do tempo de Bob no instante $t_b = (1+\beta^2)(T/2)$. Ou seja: ao fazer a inversão de marcha, Alice perde do seu radar um intervalo de tempo $\Delta t = t_b - t_a = \beta^2 T$. No diagrama do lado direito da Fig. 40 mostra-se, por sua vez, que Bob só toma conhecimento – no seu radar – da inversão de marcha de Alice no instante $t = t_1 = (1+\beta)(T/2)$. Assim, do ponto de vista de Bob, a viagem de volta de Alice deverá durar $t_2 = T - t_1 = (1-\beta)(T/2)$.

Finalmente, na Fig. 41, indicam-se quais os sinais emitidos e recebidos por cada um dos dois irmãos. Considera-se que cada um deles emite sinais com uma frequência $f = 1 \text{ ano}^{-1}$. Logo, como se

considera $\beta = 3/5$, é $\kappa = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} = 2$ donde $f' = f/\kappa = 0.5 \text{ ano}^{-1}$ e $f'' = \kappa f = 2 \text{ ano}^{-1}$. Como no início da viagem ambos os gémeos têm 30 anos e se admite que Bob envelheceu $T = 10$ anos, a idade de Bob aquando do reencontro é de 40 anos. Mas, por outro lado, Alice – que viajou até uma distância $L = \beta(T/2) = 3 \text{ anos-luz}$ – só envelheceu, em todo este processo, $T' = T/\gamma = (4/5)T = 8 \text{ anos}$ devido à dilatação do tempo. Portanto: quando, no fim da viagem, os dois gémeos se voltam a reencontrar, Bob terá 40 anos enquanto Alice terá 38 anos. Claro que se poderia tornar esta diferença muito mais dramática se, em vez de $\beta = 3/5$, se tivesse considerado um valor mais próximo de $c = 1$.

Figura 41

Nesta figura representam-se explicitamente todos os sinais emitidos e recebidos pelos dois gémeos. Considera-se $\beta = 3/5$ pelo que $\gamma = 5/4$ e $\kappa = 2$. Cada um dos gémeos envia para o outro sinais com uma frequência $f = 1 \text{ ano}^{-1}$ pelo que $f' = f/\kappa = 0.5 \text{ ano}^{-1}$ e $f'' = \kappa f = 2 \text{ ano}^{-1}$ em resultado do efeito Doppler.



A duração da viagem, do ponto de vista de Bob, é $T = 2L/\beta$. Porém, do ponto de vista de Alice, essa duração foi $T' = T/\gamma$ em resultado da dilatação do tempo. O número total de sinais enviados por Bob foi $N = fT = 10$ enquanto o de Alice foi $N' = fT' = 8$. Vejamos, agora, o números de sinais recebidos. Na viagem de ida, Bob recebeu $M_1 = f't_1 = (fL/\beta)\sqrt{1-\beta^2} = 4$ enquanto que Alice

recebeu $M'_1 = f' t'_1 = (fL/\beta)(1-\beta) = 2$. Por sua vez, na viagem de volta, Bob recebeu $M_2 = f'' t_2 = (fL/\beta)\sqrt{1-\beta^2} = 4$ enquanto que Alice recebeu $M'_2 = f'' t'_2 = (fL/\beta)(1+\beta) = 8$. Ou seja: Bob recebeu um total de $M = M_1 + M_2 = 8$ sinais enquanto que Alice recebeu um total de $M' = M'_1 + M'_2 = 10$ sinais. Naturalmente que terá de ser $M = N'$ e $M' = N$. Desta forma, Bob pode prever, correctamente, que Alice envelheceu 8 anos. E, também correctamente, Alice pode prever que Bob envelheceu 10 anos. Em conclusão: não obstante ambos os gémeos terem 30 anos no início, no fim da viagem Bob terá 40 anos enquanto que Alice terá 38 anos.

No fim desta secção, para sistematizar a nossa análise, anexa-se uma Tabela (na página seguinte) que ilustra o paradoxo dos gémeos em termos do efeito Doppler. Na última linha dessa Tabela aparece a conclusão que cada gémeo retira do número total de sinais recebidos. Bob conclui que Alice envelheceu $T_x = 8$ anos enquanto que Alice conclui que Bob envelheceu $T'_x = 10$ anos. Estes resultados estão de acordo com o que cada um diz que envelheceu:

- Bob diz que envelheceu $T = 2L/\beta = 10$ anos (recorda-se aqui que $L = 3$ anos-luz e $\beta = 0.6$) e este resultado coincide com a conclusão a que Alice chega sobre o envelhecimento do seu irmão, i.e., $T'_x = 10$ anos ;
- Alice diz que envelheceu $T' = 2L_0/\beta = 8$ anos (porque, devido à contracção do espaço, ela apenas viajou até uma distância $L_0 = L/\gamma = 12/5 = 2.4$ anos-luz) e este resultado coincide com a conclusão a que Bob chega sobre o envelhecimento da sua irmã, i.e., $T_x = 8$ anos .

«There is no universal time, because time is a route-dependent quantity.»

Hermann Bondi, *Relativity and Common Sense – A New Approach to Einstein*. New York: Dover, 1980 (unabridged and corrected republication of the work originally published in 1964 by Doubleday & Company), p. 151.

«The American Heritage dictionary defines *paradox* as a “seemingly contradictory statement that may nevertheless be true.” We obtain a paradox by describing the situation from Alice’s point of view. Bob moves away at uniform speed, reverses direction, and returns at uniform speed. That seems to be exactly the same as the situation from Bob’s point of view, who sees Alice move away at uniform speed, reverse direction, and return at uniform speed. The result is not symmetric; Alice is younger than Bob. However, their situations are not symmetric. Alice and Bob travel two *different* world lines in spacetime with different distances between their starting and ending points. Their clocks measure these distances and so read differently.»

James B. Hartle, *Gravity – An Introduction to Einstein’s General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2003 (pp. 64—65).

TABELA

	<i>Ponto de vista de Bob</i>	<i>Ponto de vista de Alice</i>
<i>Tempo total da viagem</i>	$T = \frac{2L}{\beta}$	$T' = \frac{2L_0}{\beta} = \frac{2L}{\gamma\beta}$
<i>Número total de sinais enviados</i>	$N = fT = \frac{2fL}{\beta}$	$N' = fT' = \frac{2fL}{\gamma\beta}$
<i>Instante em que a inversão de marcha é detectada</i>	$t_1 = \frac{L}{\beta}(1 + \beta)$	$t'_1 = \frac{L}{\gamma\beta}$
<i>Número de sinais recebidos na viagem de ida</i>	$M_1 = f't_1 = \frac{fL}{\beta}$	$M'_1 = f't'_1 = \frac{fL}{\beta}(1 - \beta)$
<i>Tempo restante</i>	$t_2 = \frac{L}{\beta}(1 - \beta)$	$t'_2 = \frac{L}{\gamma\beta}$
<i>Número de sinais recebidos na viagem de volta</i>	$M_2 = f''t_2 = \frac{fL}{\beta}$	$M'_2 = f''t'_2 = \frac{fL}{\beta}(1 + \beta)$
<i>Número total de sinais recebidos</i>	$M = M_1 + M_2 = N'$	$M' = M'_1 + M'_2 = N$
<i>Conclusão: tempo total de viagem do outro gémeo</i>	$T_x = \frac{M}{f} = \frac{N'}{f} = T'$	$T'_x = \frac{M'}{f} = \frac{N}{f} = T$

12. Tempo próprio

O facto histórico, hoje incontornável, desta teoria ter sido designada por «teoria da relatividade» é, muito provavelmente, lamentável (e, segundo parece, algo que até o próprio Einstein lamentou). Com efeito, mais do que o reconhecimento de que determinadas grandezas físicas são relativas, é fundamental o estabelecimento de um conjunto de novos *invariantes*. Por exemplo: no espaço-tempo de Minkowski o invariante fundamental é, como já se viu anteriormente, o *intervalo* entre dois acontecimentos.

Sejam A e B dois acontecimentos do plano hiperbólico – o modelo matemático reduzido, $\mathbb{R}^{1,1}$, do espaço-tempo de Minkowski, $\mathbb{R}^{1,3}$. Estes acontecimentos têm coordenadas diferentes em dois referenciais de inércia distintos: $S \mapsto (x, t)$ e $S' \mapsto (x', t')$. Em $S \mapsto (x, t)$ tem-se $A \mapsto (x_A, t_A)$ e $B \mapsto (x_B, t_B)$. Em $S' \mapsto (x', t')$ tem-se $A \mapsto (x'_A, t'_A)$ e $B \mapsto (x'_B, t'_B)$. Mas, como se viu anteriormente, o *intervalo* entre estes acontecimentos é o mesmo *independentemente* do referencial de inércia considerado. De facto,

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{r}_A = t_A \mathbf{e}_0 + x_A \mathbf{e}_1 = t'_A \mathbf{f}_0 + x'_A \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{r}_B = t_B \mathbf{e}_0 + x_B \mathbf{e}_1 = t'_B \mathbf{f}_0 + x'_B \mathbf{f}_1 \end{array} \right] \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \\ = (t_A - t_B) \mathbf{e}_0 + (x_A - x_B) \mathbf{e}_1 \\ = (t'_A - t'_B) \mathbf{f}_0 + (x'_A - x'_B) \mathbf{f}_1 \end{array} \right.$$

$$\therefore (\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{r})^2 = (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 = (t'_A - t'_B)^2 - (x'_A - x'_B)^2,$$

uma vez que $\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{f}_0^2 = 1$ e $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{f}_1^2 = -1$. Assim, fazendo $\Delta t = t_A - t_B$, $\Delta t' = t'_A - t'_B$, $\Delta x = x_A - x_B$ e $\Delta x' = x'_A - x'_B$, é possível escrever

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2.$$

A versão diferencial (ou infinitesimal) desta última equação tem a forma

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - dx^2 = (dt')^2 - (dx')^2}.$$

Um *relógio* é um dispositivo que mede intervalos do tipo tempo, com $(\Delta s)^2 > 0$. Uma *régua* é um dispositivo que mede intervalos do tipo espaço, com $(\Delta s)^2 < 0$. Numa linha de universo do tipo tempo é sempre, em todos os seus acontecimentos, $ds^2 > 0$. Para medir a distância ao longo desta linha de universo, introduz-se o elemento de distância $d\tau$, tal que

$$ds^2 > 0 \mapsto d\tau^2 \equiv ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 \left[1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \mapsto \boxed{d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}}.$$

Tem-se, portanto,

$$\boxed{\tau_{AB} = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt}.$$

Um relógio que se move sobre uma linha de universo do *tipo tempo* mede, então, a distância τ ao longo dela – aquilo que, doravante, se vai designar como o *tempo próprio* dessa linha de universo. O integral anterior, que dá o tempo próprio τ_{AB} entre os acontecimentos **A** e **B**, não depende apenas destes acontecimentos – depende, também, da linha de universo específica que os une. Ao contrário do tempo absoluto da mecânica newtoniana, o tempo da relatividade é uma «distância» que se mede (e.g., com uma fita métrica) ao longo de uma linha de universo determinada. Outra linha de universo, que una os mesmos acontecimentos (inicial e final), dará uma leitura de tempo próprio que será, no caso geral, diferente.

Consideremos, de novo, a Fig. 39. O tempo próprio da linha de universo de Bob, sobre $A \rightarrow C \rightarrow B$, dá

$$T = \int_{\tau_A}^{\tau_C} dt + \int_{\tau_C}^{\tau_B} dt = (t_C - t_A) + (t_C - t_A) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T.$$

Porém, no caso de Alice, o tempo próprio $A \rightarrow D \rightarrow B$, corresponde a

$$T' = \int_{\tau_A}^{\tau_D} \sqrt{1 - \beta^2} dt + \int_{\tau_D}^{\tau_B} \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} \left(\int_{\tau_A}^{\tau_D} dt + \int_{\tau_D}^{\tau_B} dt \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right)$$

$$\therefore \boxed{T' = \frac{T}{\gamma}}.$$

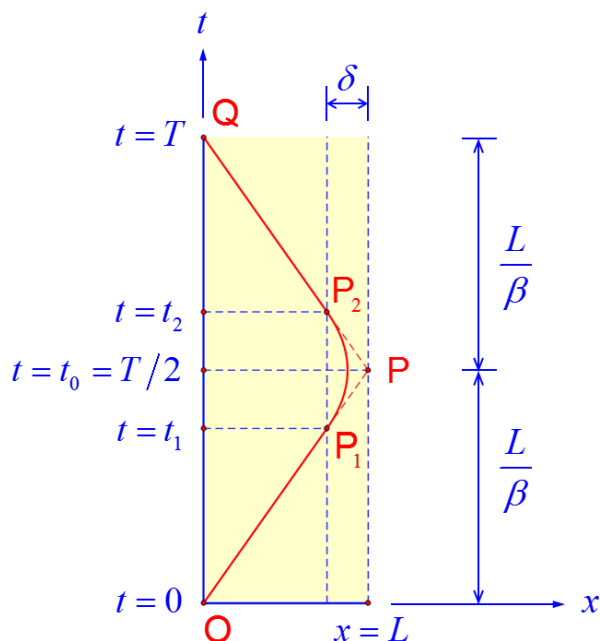
Este é, muito simplesmente, o resultado fundamental do paradoxo dos gémeos, a saber:

$$0 < |\beta| < 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \Rightarrow T' < T.$$

O problema com a Fig. 39 é que existe, para Alice, uma aceleração infinita no acontecimento **D**. Esta aceleração infinita está relacionada com o que mostra o diagrama esquerdo da Fig. 40, i.e., uma mudança abrupta de equitemps: $\mathbf{f}_1 \rightarrow \mathbf{g}_1$. De forma a evitar esta mudança abrupta (e, claro está, o perigo mortal que tal mudança acarreta para Alice), vamos considerar uma nova versão para a linha de universo de Alice. Esta nova versão encontra-se representada na Fig. 42.

Figura 42

Aqui considera-se uma versão alternativa, em relação às Figs. 39—41, da linha de universo de Alice. Em vez da linha de universo $A \rightarrow D \rightarrow B$ para a viagem de Alice, com aceleração infinita no acontecimento D , considera-se um intervalo finito (mas não nulo) em que a aceleração experimentada por Alice, na sua nave espacial, tem um valor finito. Mais concretamente: a nova linha de universo de Alice é, de acordo com esta figura, $O \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow Q$ e não $O \rightarrow P \rightarrow Q$.



Note-se que Bob continua a ter a linha de universo vertical $O \rightarrow Q$ a que corresponde um tempo próprio total T associado a um (único) referencial de inércia $S_B \mapsto (x, t)$. O referencial próprio de Alice, $S_A \mapsto (\chi, \tau)$, não é um referencial de inércia e, ao contrário da Fig. 39, não é decomponível em (apenas) dois referenciais de inércia. Neste referencial a linha de universo de Alice é, por definição, $\chi \equiv 0$. O que se tem, agora, para a linha de universo de Alice é o seguinte: (i) para o troço $O \rightarrow P_1$ existe um único referencial de inércia; (ii) para o troço (com aceleração) $P_1 \rightarrow P_2$ existe uma infinidade contínua de referenciais de inércia que, localmente, coincidem (cada um deles) com $S_A \mapsto (x', t')$; (iii) finalmente, para o troço $P_2 \rightarrow Q$, existe (novamente) um único referencial de inércia. No plano hiperbólico $\mathbb{R}^{1,1}$ desta figura o troço curvo $P_1 \rightarrow P_2$ é um arco de *parábola*. Ou seja, se $t_0 = T/2$, a linha de universo de Alice, nesse troço, é tal que

$$\boxed{t_1 \leq t \leq t_2} \mapsto \boxed{x(t) = -\frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + x_0},$$

em que $x_0 = x(t_0)$ e onde t é o tempo próprio de Bob. A velocidade, nesse troço, é

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(t-t_0)$$

e a aceleração

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha,$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante. Não devemos esquecer que (x, t) são as coordenadas usadas por Bob no seu referencial (próprio) de inércia. Note-se que, aquando da inversão de marcha em $t = t_0$, a velocidade instantânea de Alice é

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Obviamente que a velocidade instantânea de Alice em $P_1 \mapsto (x_1, t_1)$ e em $P_2 \mapsto (x_2, t_2)$, deve ser, com $x_1 = x_2 = L - \delta$,

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = -\alpha(t_1 - t_0) = \beta, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_2} = -\alpha(t_2 - t_0) = -\beta.$$

Logo, vem sucessivamente

$$\begin{cases} t_1 = \frac{L - \delta}{\beta} \\ t_0 = \frac{L}{\beta} \\ t_2 = \frac{L + \delta}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 - t_1 = \frac{\delta}{\beta} \\ t_2 - t_0 = \frac{\delta}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\beta^2}{\delta}}.$$

O parâmetro $\delta = L - x_1 = L - x_2$, tal que $0 \leq \delta \leq L$, é suficiente para caracterizar a família de parábolas. Seja $R \mapsto (x_0, t_0)$ o acontecimento correspondente à inversão de marcha de Alice. Tem-se, como já se viu, $t_0 = T/2 = L/\beta$ e, ainda,

$$x_1 = L - \delta = -\frac{1}{2}\alpha(t_1 - t_0)^2 + x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = L - \frac{\delta}{2}}.$$

Como é óbvio, $x_0 = L$ para $\delta = 0$ e $x_0 = L/2$ para $\delta = L$. A linha de universo $O \rightarrow P_1 \rightarrow R \rightarrow P_2 \rightarrow Q$ é então, em termos de $S_B \mapsto (x, t)$,

$$x(t) = \begin{cases} \beta t, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \left(L - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\delta} \left(t - \frac{L}{\beta}\right)^2, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -\beta(t-T), & t_2 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Para se calcular o tempo próprio $\tau = \tau(t)$ de Alice, no seu referencial próprio $S_A \mapsto (\chi, \tau)$, basta considerar – como se viu anteriormente – que

$$\boxed{t_1 \leq t \leq t_2} \mapsto \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 (t - t_0)^2}}.$$

Logo, infere-se que

$$d\tau = \sqrt{1 - \alpha^2 (t - t_0)^2} dt.$$

Mas então, atendendo a que

$$\int \sqrt{1 - \alpha^2 (t - t_0)^2} dt = \frac{1}{2} (t - t_0) \sqrt{1 - \alpha^2 (t - t_0)^2} + \frac{1}{2\alpha} \sin^{-1}[\alpha (t - t_0)],$$

obtém-se

$$\boxed{t_1 \leq t \leq t_2} \mapsto \tau(t) = \tau_0 + \frac{1}{2} (t - t_0) \sqrt{1 - \alpha^2 (t - t_0)^2} + \frac{1}{2\alpha} \sin^{-1}[\alpha (t - t_0)],$$

onde se introduziu $\tau_0 = \tau(t_0)$. Em particular, desta última equação resulta (recordando que $\alpha = \beta^2 / \delta$ e $T' = T / \gamma = 2t_0 / \gamma$)

$$\begin{cases} \tau(t_1) = \frac{L - \delta}{\gamma \beta} \\ = \tau_0 + \frac{1}{2} (t_1 - t_0) \sqrt{1 - \alpha^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2\alpha} \sin^{-1}[\alpha (t_1 - t_0)] \\ = \tau_0 - \frac{\delta}{2\beta} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha \delta}{\beta}\right)^2} - \frac{1}{2\alpha} \sin^{-1}\left(\frac{\alpha \delta}{\beta}\right) \\ = \tau_0 - \frac{\delta}{2\beta} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{\delta}{2\beta^2} \sin^{-1}(\beta) \end{cases}$$

$$\therefore \tau_0 = \frac{L - \delta}{\gamma \beta} + \frac{\delta}{2\beta^2} \left[\frac{\beta}{\gamma} + \sin^{-1}(\beta) \right] \mapsto \boxed{\tau_0 = \frac{T'}{2} + \frac{\delta}{2\beta^2} \left[\sin^{-1}(\beta) - \frac{\beta}{\gamma} \right]}.$$

Note-se que, para $\delta = 0$, se recupera o resultado da secção anterior: $\tau_0 = T'/2 = L/(\gamma\beta)$. Assim, o tempo próprio de Alice é dado por

$$\tau(t) = \begin{cases} t\sqrt{1-\beta^2}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \tau_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)\sqrt{1-[\alpha(t-t_0)]^2} + \frac{1}{2\alpha}\sin^{-1}[\alpha(t-t_0)], & t_1 \leq t \leq t_2, \\ T_* + (t-T)\sqrt{1-\beta^2}, & t_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Para este resultado considerou-se que $\tau(0) = 0$, $\tau(t_0) = \tau_0$ e, ainda, que

$$T_* = \tau(T),$$

onde se designou por T_* o tempo total gasto por Alice na sua viagem de ida e volta à Terra. Em particular, tira-se daqui que

$$\tau_1 = \tau(t_1) = \frac{t_1}{\gamma} = t_1\sqrt{1-\beta^2} = \frac{T'}{2} - \frac{\delta}{\beta}\sqrt{1-\beta^2}, \quad \tau_2 = \tau(t_2) = \frac{T'}{2} + \frac{\delta}{\beta^2}\sin^{-1}(\beta).$$

Portanto, vem

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2\delta}{\beta^2}\sin^{-1}(\beta).$$

Este intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$ deverá coincidir com o tempo gasto por Alice em toda a viagem quando $\delta = L$. Obviamente que $\Delta\tau = 0$ quando $\delta = 0$. Sublinhe-se, todavia, que

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2\delta}{\beta^2}\sin^{-1}(\beta) \neq \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} = \frac{2\delta}{\beta}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Logo, como

$$T_* + (t_2 - T)\sqrt{1-\beta^2} = \tau_0 + \frac{1}{2}(t_2 - t_0)\sqrt{1-[\alpha(t_2 - t_0)]^2} + \frac{1}{2\alpha}\sin^{-1}[\alpha(t_2 - t_0)],$$

infere-se que

$$T_* = 2\tau_0 = T' + \frac{\delta}{\beta^2}\left[\sin^{-1}(\beta) - \frac{\beta}{\gamma}\right],$$

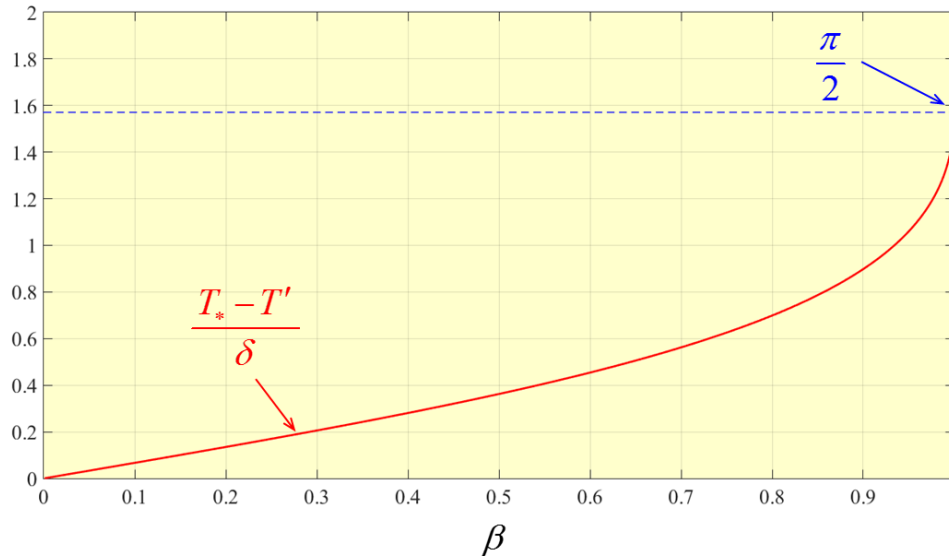
pois $\alpha(t_2 - t_0) = \beta$, $t_2 - t_0 = \delta/\beta$ e $T - t_2 = t_1$. Quando $\delta = 0$ recupera-se o valor $T_* = T'$ obtido na secção anterior:

$$\delta = 0 \quad \mapsto \quad T_* = T' = \frac{2L}{\gamma\beta}.$$

Note-se que

$$\frac{T_* - T'}{\delta} = \frac{1}{\beta^2} \left[\sin^{-1}(\beta) - \beta \sqrt{1 - \beta^2} \right].$$

A figura anexa representa graficamente a variação de $(T_* - T')/\delta$ em função da velocidade β .



Quando $\beta \rightarrow 1$ obtém-se $T' \rightarrow 0$ e $T_*/\delta \rightarrow \pi/2$. Para $0 < \beta < 1$ esta nova versão da linha de universo de Alice (Fig. 42) corresponde a um maior intervalo de tempo próprio para a astronauta do que a versão da secção anterior (Fig. 39).

Se se introduzirem as variáveis

$$X = \frac{t}{T}, \quad Y = \frac{\tau}{T},$$

e fazendo, ainda,

$$\Delta = \frac{\delta}{T} \mapsto \begin{cases} X_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{\beta}, \\ X_2 = \frac{t_2}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{\beta}, \end{cases}$$

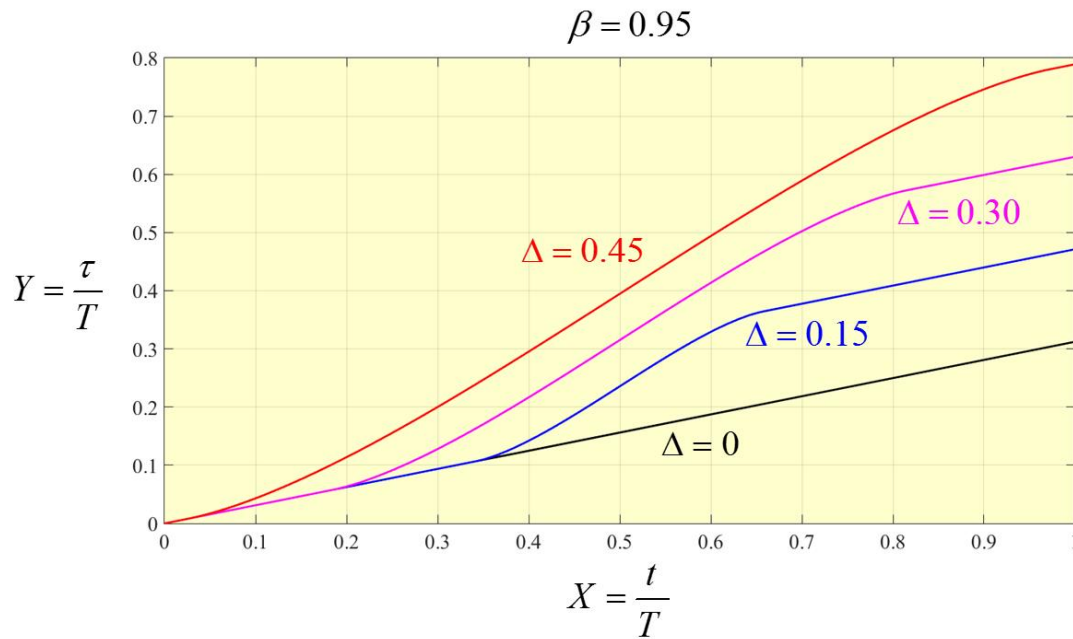
tira-se que

$$\boxed{Y_0 = \frac{\tau_0}{T} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\Delta}{2\beta^2} \left[\sin^{-1}(\beta) - \beta \sqrt{1 - \beta^2} \right]} \mapsto \boxed{Y_* = \frac{T_*}{T} = 2Y_0}.$$

Nestas condições, vem

$$Y(X) = \begin{cases} X \sqrt{1 - \beta^2}, & 0 \leq X \leq X_1, \\ Y_0 + \frac{1}{2} \left(X - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - \left[\frac{\beta^2}{\Delta} \left(X - \frac{1}{2} \right) \right]^2} + \frac{\Delta}{2\beta^2} \sin^{-1} \left[\frac{\beta^2}{\Delta} \left(X - \frac{1}{2} \right) \right], & X_1 \leq X \leq X_2, \\ 2Y_0 + (X - 1) \sqrt{1 - \beta^2}, & X_2 \leq X \leq 1. \end{cases}$$

Como $0 \leq \delta \leq L$ infere-se que $0 \leq \Delta \leq \beta/2$. Na figura que se anexa a seguir representa-se graficamente Y em função de X para $\beta = 0.95$ e diferentes valores do parâmetro Δ .



13. Movimento hiperbólico

Até aqui temos considerado velocidade e aceleração relativas. Na secção anterior introduziu-se o conceito de tempo próprio (e.g., de uma partícula) sobre uma dada linha de universo. Este conceito vai-nos permitir introduzir dois outros conceitos fundamentais – a velocidade e a aceleração próprias (ou absolutas). Continuamos, como sempre até aqui, a considerar unidades geométricas e, apenas, uma única dimensão espacial.

O movimento de uma partícula no plano hiperbólico $\mathbb{R}^{1,1}$ sobre uma dada linha de universo (do tipo tempo) pode ser descrita, num certo laboratório, pelo vector acontecimento

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_0 + x(t)\mathbf{e}_1 = \tau(t)\mathbf{u}(t).$$

Estamos a supor que esse laboratório é um referencial de inércia $S \mapsto (x, t)$. Neste referencial a família de equilocs é determinada pelo vector unitário \mathbf{e}_0 e a família de equitemps pelo vector unitário \mathbf{e}_1 . A partícula dispõe de um relógio – que se move solidário com ela – onde se regista o seu tempo próprio $\tau(t)$. Sobre a linha de universo da partícula é possível definir, em cada instante t do laboratório, um vector do tipo tempo *unitário* $\mathbf{u}(t)$, sempre tangente à linha de universo da partícula. Note-se que $\mathbf{e}_0^2 = -\mathbf{e}_1^2 = 1$, onde o conjunto $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ constitui uma base ortonormada, constante, de $S \mapsto (x, t)$. Já o vector $\mathbf{u}(t)$, com $\mathbf{u}^2(t) \equiv 1$, é um vector em movimento do ponto de vista do laboratório – daí a sua dependência explícita com o tempo t . Assim,

$$s^2(t) \equiv \mathbf{r}^2(t) = t^2 - x^2(t) = \tau^2(t).$$

Podemos definir, então, a *velocidade própria* da partícula, $\dot{\mathbf{r}}(t)$, como sendo

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{d\tau}\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}(t).$$

Infere-se, deste modo, que $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{u}$, com $\mathbf{u}^2 \equiv 1$. Logo,

$$\mathbf{u}(t) = \frac{dt}{d\tau}\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}\mathbf{e}_1 = \frac{dt}{d\tau}\left(\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1\right) \mapsto \mathbf{u}(t) = \frac{dt}{d\tau}\left[\mathbf{e}_0 + \beta(t)\mathbf{e}_1\right],$$

onde se introduziu a velocidade relativa (não confundir com a velocidade própria ou absoluta)

$$\boxed{\beta(t) = \frac{dx}{dt}}.$$

Assim, infere-se que

$$\mathbf{u}^2(t) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 [1 - \beta^2(t)] = 1.$$

Ou seja: a velocidade própria é (sempre) um vector unitário do tipo tempo. Consequentemente, se se definir

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} \quad \mapsto \quad 1 + \gamma^2(t) \beta^2(t) = \gamma^2(t),$$

tira-se que

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \gamma(t)}.$$

Conclui-se, deste modo, que as velocidades própria $\mathbf{u}(t)$ e relativa $\beta(t)$ se relacionam através da expressão

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \gamma(t) [\mathbf{e}_0 + \beta(t) \mathbf{e}_1]}.$$

Note-se que, desta expressão, resulta (a identidade seguinte vai ser útil mais adiante)

$$\boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}(t) = -\gamma(t) \beta(t)}.$$

Vejamos um caso particular de aplicação. Quando o movimento é uniforme, tem-se $\beta(t) = \beta_0$ e $\gamma(t) = \gamma_0 = 1 / \sqrt{1 - \beta_0^2}$, de forma que a velocidade própria é, neste caso, um vector unitário e constante no referencial do laboratório, com

$$\mathbf{u}(t) = \gamma_0 (\mathbf{e}_0 + \beta_0 \mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_0.$$

Este é o caso particular em que o referencial próprio da partícula é também, tal como o laboratório, um referencial de inércia, tendo-se

$$\beta_0 = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) - x_0 = \beta_0 (t - t_0)}.$$

Existe, deste modo, um acontecimento $P(x_0, t_0)$ que pertence à linha de universo da partícula (uma recta, do ponto de vista do laboratório). No caso da partícula se encontrar em repouso no laboratório, tem-se $\beta_0 = 0$, donde $x(t) = x_0$.

Vamos agora admitir o caso geral da linha de universo da partícula ser uma curva contínua, i.e., de existir aceleração. Define-se a *aceleração própria* $\mathbf{a}(t)$ da partícula, tal que

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}} \mapsto \left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(t) [\mathbf{e}_0 + \beta(t) \mathbf{e}_1] \right\} \\ &= \gamma(t) \frac{d\beta}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{d\gamma}{d\tau} [\mathbf{e}_0 + \beta(t) \mathbf{e}_1] \\ &= \gamma(t) \frac{d\beta}{dt} \frac{dt}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} [\mathbf{e}_0 + \beta(t) \mathbf{e}_1] \\ &= \gamma^2(t) \frac{d\beta}{dt} \mathbf{e}_1 + \gamma(t) \frac{d\gamma}{dt} [\mathbf{e}_0 + \beta(t) \mathbf{e}_1], \end{aligned} \right.$$

donde vem

$$\mathbf{a}(t) = \gamma^2(t) \alpha(t) \mathbf{e}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{u}(t).$$

Para a escrita desta última equação introduziu-se a *aceleração relativa* $\alpha(t)$, tal que

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{d\beta}{dt}}.$$

Deve-se sublinhar que a velocidade e a aceleração próprias são ortogonais entre si:

$$\mathbf{u}^2(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = 1 \Rightarrow \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \cdot \mathbf{u}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0}.$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$\gamma^2(t) = \frac{1}{1 - \beta^2(t)} \Rightarrow 2\gamma(t) \frac{d\gamma}{dt} = \frac{2\alpha(t) \beta(t)}{[1 - \beta^2(t)]^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \alpha(t) \beta(t) \gamma^3(t)},$$

de modo que

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \gamma^2(t) \alpha(t) [\mathbf{e}_1 + \gamma(t) \beta(t) \mathbf{u}(t)]}.$$

Esta última equação revela a relação existente entre a aceleração própria $\mathbf{a}(t)$ e a velocidade própria $\mathbf{u}(t)$ no referencial do laboratório. Daqui resulta que

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}(t) &= \gamma^2(t) \alpha(t) [-1 + \gamma(t) \beta(t) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}(t)] \\ &= -\gamma^2(t) \alpha(t) [1 + \gamma^2(t) \beta^2(t)] \end{aligned} \right. \mapsto \boxed{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}(t) = -\gamma^4(t) \alpha(t)}.$$

Além disso, obtém-se

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}^2(t) &= \gamma^4(t) \alpha^2(t) \left[-1 + 2\gamma(t) \beta(t) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}(t) + \gamma^2(t) \beta^2(t) \right] \\ &= \gamma^4(t) \alpha^2(t) \left[-1 - 2\gamma^2(t) \beta^2(t) + \gamma^2(t) \beta^2(t) \right] \Rightarrow \boxed{\mathbf{a}^2(t) = -\gamma^6(t) \alpha^2(t)} \\ &= -\gamma^4(t) \alpha^2(t) \left[1 + \gamma^2(t) \beta^2(t) \right] \end{aligned} \right.$$

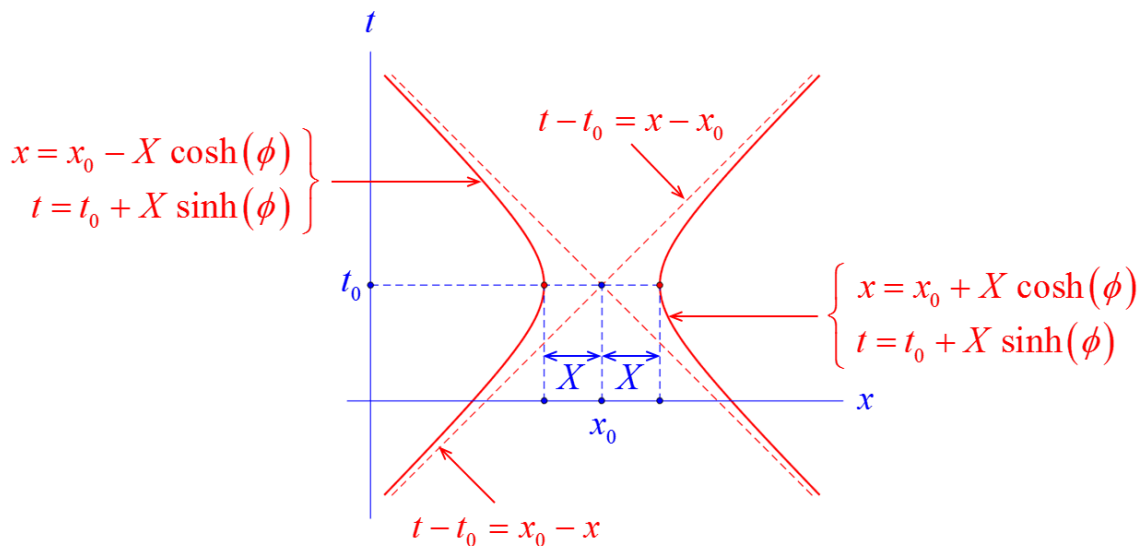
A última equação revela que $\mathbf{a}^2(t) < 0$ desde que $\alpha(t) \neq 0$, i.e. o vector da aceleração própria é um vector do tipo espaço – ao contrário da velocidade própria que é sempre do tipo tempo e, daí, que $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$, tal como se viu anteriormente. O valor $\Gamma(t) = |\mathbf{a}(t)|$ da aceleração própria é, consequentemente,

$$\boxed{\Gamma(t) = \gamma^3(t) |\alpha(t)|}.$$

Vamos agora analisar um caso concreto de movimento acelerado: o *movimento hiperbólico*. Neste caso a linha de universo descrita por uma partícula (em relação ao laboratório) é, por definição, uma hipérbole. Admitamos, então, que se trata da hipérbole cuja equação é (coordenadas do laboratório)

$$\boxed{(x - x_0)^2 - (t - t_0)^2 = X^2}.$$

A figura anexa mostra os dois ramos desta hipérbole.



Escolhemos, doravante, o ramo direito da hipérbole, pelo que

$$x(t) = x_0 + \sqrt{X^2 + (t-t_0)^2}.$$

Introduzamos, agora, um parâmetro ϕ (denominado *rapidez*), tal que

$$\frac{x-x_0}{X} = \pm \cosh(\phi), \quad \frac{t-t_0}{X} = \sinh(\phi).$$

O ramo direito corresponde á escolha do sinal (+) na equação paramétrica para $x = x(\phi)$. Mais adiante será necessário o seguinte resultado:

$$t = t_0 + X \sinh(\phi) \Rightarrow \frac{dt}{d\phi} = X \cosh(\phi).$$

Ao derivar a equação da hipérbole em ordem ao tempo, obtém-se

$$(x-x_0)^2 - (t-t_0)^2 = X^2 \Rightarrow 2(x-x_0) \frac{dx}{dt} - 2(t-t_0) = 0 \Rightarrow \beta(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{t-t_0}{x-x_0} = \tanh(\phi)$$

$$\therefore \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \cosh(\phi).$$

Além disso,

$$\beta(t) = \frac{t-t_0}{x-x_0} \mapsto \beta(t) = \frac{t-t_0}{\sqrt{X^2 + (t-t_0)^2}} \mapsto \gamma(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{t-t_0}{X}\right)^2}.$$

Mas, atendendo a que

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(t) = \cosh(\phi) \Rightarrow \cosh(\phi) = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = X \cosh(\phi) \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{X},$$

tem-se, com $\phi = 0$ para $\tau = 0$,

$$\phi(\tau) = \frac{\tau}{X} = \sinh^{-1}\left(\frac{t-t_0}{X}\right) \mapsto \tau(t) = X \sinh^{-1}\left(\frac{t-t_0}{X}\right).$$

Acertaram-se os relógios da seguinte forma: quando no laboratório é $t = t_0$ o tempo próprio da partícula em movimento é $\tau = 0$. Note-se, ainda, que

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + X \cosh\left(\frac{\tau}{X}\right) \\ t(\tau) &= t_0 + X \sinh\left(\frac{\tau}{X}\right) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \beta(\tau) &= \tanh\left(\frac{\tau}{X}\right) \\ \gamma(\tau) &= \cosh\left(\frac{\tau}{X}\right) \end{aligned} \right\}.$$

A aceleração relativa é

$$\beta^2(t) = \frac{(t-t_0)^2}{X^2 + (t-t_0)^2} \Rightarrow 2\beta(t) \frac{d\beta}{dt} = \frac{2(t-t_0)X^2}{[X^2 + (t-t_0)^2]^2}$$

$$\therefore \boxed{\alpha(t) = \frac{d\beta}{dt} = \frac{X^2}{[X^2 + (t-t_0)^2]^{3/2}}}$$

Por sua vez, a aceleração própria tem um valor

$$\boxed{\Gamma(t) = \gamma^3(t) \alpha(t) \equiv \Gamma_0 = \frac{1}{X}}$$

Conclusão: o movimento hiperbólico caracteriza-se por ter uma aceleração própria constante, dada por $\Gamma_0 = 1/X$.

Este movimento reduz-se, no limite newtoniano, ao caso do movimento uniformemente acelerado. Vejamos. Começemos por restaurar as unidades SI. Tem-se $\Gamma_0 = c^2/X$ e, como

$$\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{1}{2}u, \quad |u| \ll 1,$$

obtém-se sucessivamente

$$\left| \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \sqrt{X^2 + c^2(t-t_0)^2} \\ &= x_0 + X \sqrt{1 + \left(\frac{c}{X}\right)^2 (t-t_0)^2} \\ &= x_0 + \frac{c^2}{\Gamma_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma_0}{c}\right)^2 (t-t_0)^2} \\ &\approx x_0 + \frac{c^2}{\Gamma_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_0}{c}\right)^2 (t-t_0)^2 \right] \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{x(t) \approx x_0 + \frac{c^2}{\Gamma_0} + \frac{1}{2} \Gamma_0 (t-t_0)^2}$$

Logo, se se considerar $x_0 = -c^2/\Gamma_0$ e $t_0 = 0$, recupera-se a conhecida lei do movimento uniformemente acelerado da mecânica newtoniana, a saber: $x(t) = (1/2)(\Gamma_0 t^2)$.

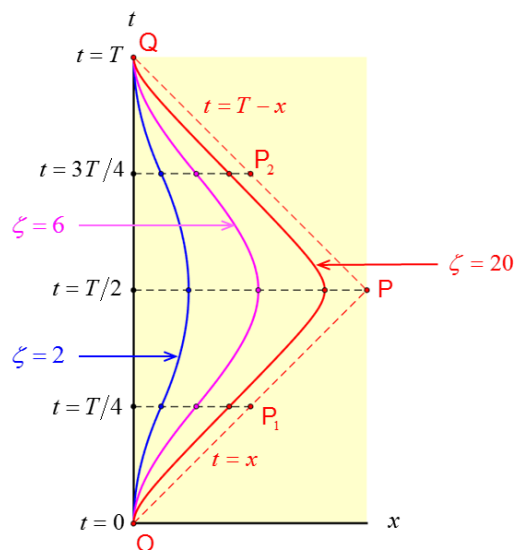
14. O paradoxo dos gémeos revisitado

O paradoxo dos gémeos já foi abordado anteriormente de duas formas distintas: primeiro, através da Fig. 39; segundo, através da Fig. 42. Em ambos os casos Bob permanece na Terra e a sua linha de universo é vertical. A diferença encontra-se, apenas, na linha de universo de Alice. Na Fig. 39 ela experimenta uma aceleração infinita no acontecimento D. Na Fig. 42 a sua aceleração é sempre finita e apenas diferente de zero no troço parabólico $P_1 \rightarrow P_2$. Nesta secção revisita-se o paradoxo dos gémeos, mas à luz da análise da secção precedente. Ou seja: a linha de universo de Bob é vertical – tal como nos outros dois exemplos já estudados; a linha de universo de Alice, porém, é agora constituída por três troços hiperbólicos – tal como se indica na Fig. 43.

Em tudo o que se segue usam-se unidades geométricas.

Figura 43

O paradoxo dos gémeos em que Alice – a gémea astronauta – tem uma linha de universo constituída por três troços de movimento hiperbólico.



Do ponto de vista de Bob a viagem durou um tempo T . A linha de universo de Alice é caracterizada através do parâmetro ζ como segue:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{T}{\zeta} \left[\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} \right)^2} - 1 \right], & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ \frac{T}{\zeta} \left[-\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^2} + 2\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{16}} - 1 \right], & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \frac{T}{\zeta} \left[\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - 1 \right)^2} - 1 \right], & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

A distância máxima da Terra, alcançada por Alice na sua viagem hiperbólica, é

$$L = x\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{2T}{\zeta} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{16}} - 1 \right).$$

Tem-se

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} L = \frac{T}{2}.$$

A linha de universo de Alice tende para a «trajectória nula», $O \rightarrow P_1 \rightarrow P \rightarrow P_2 \rightarrow Q$ (Fig. 43), quando $\zeta \rightarrow \infty$. Esta «trajectória nula» corresponde ao percurso de um sinal electromagnético (e, portanto, impossível para Alice), com

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ T - t, & \frac{T}{2} < t \leq T, \end{cases} \quad \mapsto \quad \beta(t) \equiv 1.$$

Comecemos por verificar que, em qualquer das três partes da linha de universo de Alice, se tem um troço de hipérbole. Assim, no primeiro troço, a hipérbole corresponde à equação

$$\text{primeira hipérbole} \quad \mapsto \quad \left[\left(x + \frac{T}{\zeta} \right)^2 - t^2 = \left(\frac{T}{\zeta} \right)^2 \right].$$

O segundo troço pertence a uma hipérbole de equação

$$\text{segunda hipérbole} \quad \mapsto \quad \left[\left[x - \frac{T}{\zeta} \left(2\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{16}} \right) \right]^2 - \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 = \left(\frac{T}{\zeta} \right)^2 \right].$$

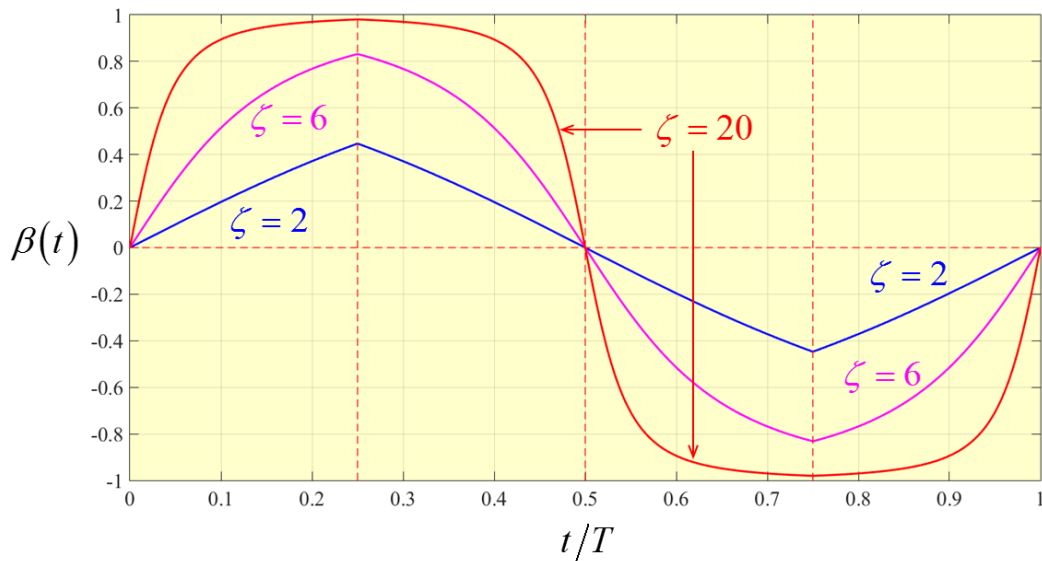
O terceiro troço, finalmente, pertence a uma hipérbole de equação

terceira hipérbole $\mapsto \left[\left(x + \frac{T}{\zeta} \right)^2 - (t - T)^2 = \left(\frac{T}{\zeta} \right)^2 \right]$.

A velocidade relativa é dada por $\beta(t) = dx/dt$, tal que

$$\beta(t) = \begin{cases} \zeta \frac{\frac{t}{T}}{\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} \right)^2}}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ -\zeta \frac{\frac{t}{T} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^2}}, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \zeta \frac{\frac{t}{T} - 1}{\sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - 1 \right)^2}}, & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

A próxima figura apresenta β - vs - t/T para diferentes valores de ζ .



Note-se que

$$\beta(0) = \beta\left(\frac{T}{4}\right) = \beta(T) = 0, \quad \beta\left(\frac{T}{4}\right) = -\beta\left(\frac{3T}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{\zeta^2} + 1}}.$$

Por sua vez, o coeficiente de dilatação do tempo,

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}},$$

é dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ \sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)^2}, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \sqrt{1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - 1\right)^2}, & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

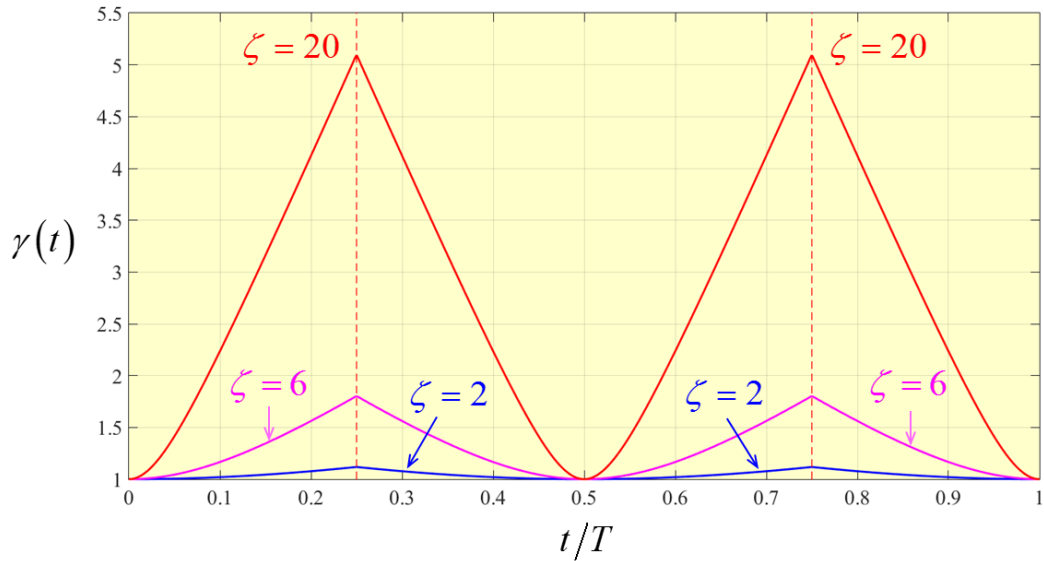
O valor máximo deste coeficiente é atingido para

$$t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} \mapsto \gamma_{\max} = \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{16}} = 1 + \frac{\zeta}{2} \frac{L}{T}.$$

Na figura anexa seguinte apresenta-se a dependência de γ com o tempo próprio t de Bob para diferentes valores de ζ .

Para a aceleração relativa $a(t) = d\beta/dt$, vem

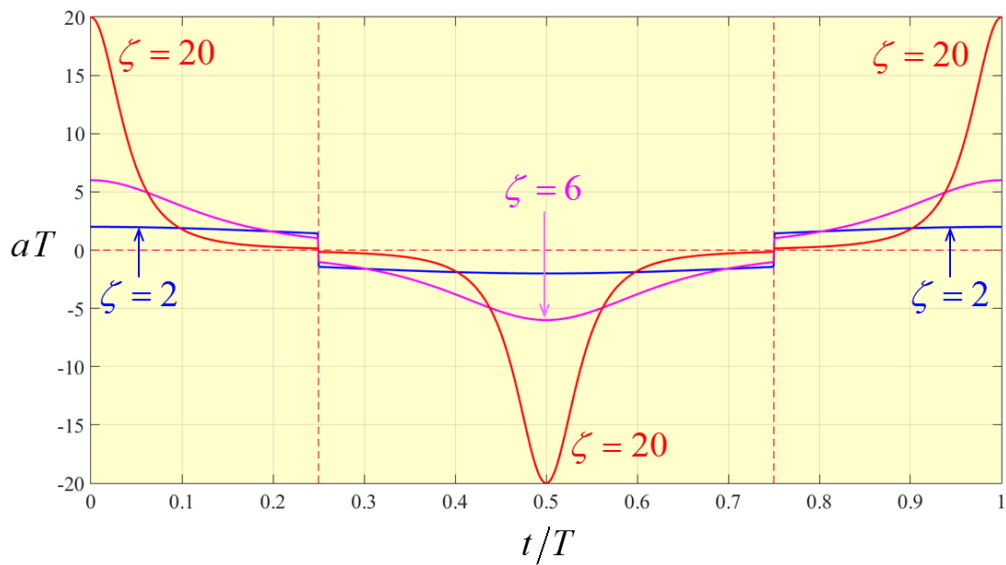
$$a(t) = \begin{cases} \frac{\zeta}{T} \left[1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \right]^{-3/2}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ -\frac{\zeta}{T} \left[1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{-3/2}, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \frac{\zeta}{T} \left[1 + \zeta^2 \left(\frac{t}{T} - 1\right)^2 \right]^{-3/2}, & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$



Tal como se viu na secção sobre o movimento hiperbólico, a aceleração própria é

$$\Gamma(t) = \gamma^3(t) |\alpha(t)| \equiv \Gamma_0 = \frac{\zeta}{T}.$$

A figura seguinte mostra a variação da aceleração relativa de Alice em função do tempo próprio t de Bob para diferentes valores de ζ .



Façamos, agora, a mudança de variável

$$\zeta \left(\frac{t}{T} - t_0 \right) = \sinh(\phi) \quad \mapsto \quad \frac{\zeta}{T} dt = \cosh(\phi) d\phi.$$

Vem, então,

$$\gamma(\phi) = \sqrt{1 + \sinh^2(\phi)} = \cosh(\phi),$$

pelo que

$$\tau(t) = \int \frac{dt}{\gamma(t)} = \frac{T}{\zeta} \int \frac{\cosh(\phi)}{\gamma(\phi)} d\phi = \frac{T}{\zeta} \int d\phi = \frac{T}{\zeta} \phi + \tau_0 = \frac{T}{\zeta} \sinh^{-1} \left[\zeta \left(\frac{t}{T} - t_0 \right) \right] + \tau_0.$$

Inferre-se, deste modo, que

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{T}{\zeta} \sinh^{-1} \left(\zeta \frac{t}{T} \right), & t \in \left[0, \frac{T}{4} \right], \\ \frac{T}{\zeta} \sinh^{-1} \left[\zeta \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{2T}{\zeta} \sinh^{-1} \left(\frac{\zeta}{4} \right), & t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4} \right], \\ \frac{T}{\zeta} \sinh^{-1} \left[\zeta \left(\frac{t}{T} - 1 \right) \right] + \frac{4T}{\zeta} \sinh^{-1} \left(\frac{\zeta}{4} \right), & t \in \left[\frac{3T}{4}, T \right]. \end{cases}$$

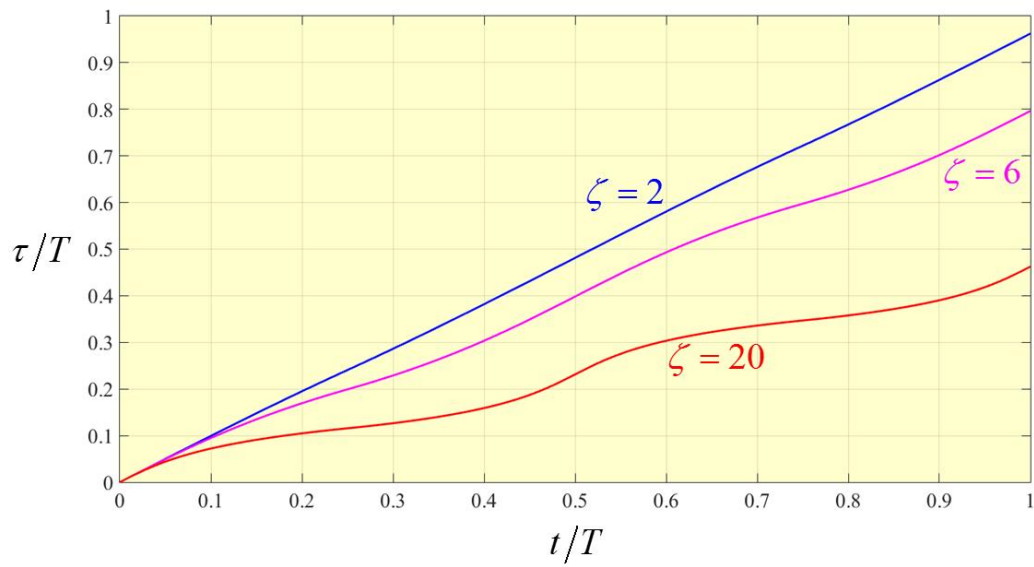
Em particular, o tempo total da viagem do ponto de vista de Alice foi $T' = \tau(T)$. Obtém-se, assim,

$$T' = \frac{4T}{\zeta} \sinh^{-1} \left(\frac{\zeta}{4} \right) \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{T'}{T} = \frac{4}{\zeta} \sinh^{-1} \left(\frac{\zeta}{4} \right) \leq 1}.$$

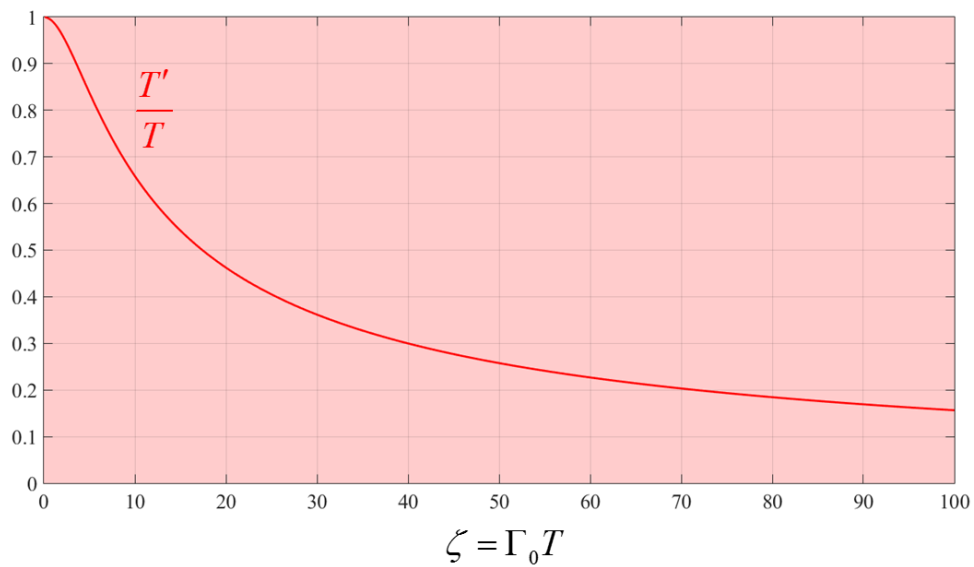
Tem-se

$$\tau(0) = 0, \quad \tau\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{T'}{4}, \quad \tau\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{T'}{2}, \quad \tau\left(\frac{3T}{4}\right) = \frac{3T'}{4}, \quad \tau(T) = T'.$$

A próxima figura mostra a variação de τ/T em função de t/T para diferentes valores do parâmetro ζ . Esta figura pretende mostrar a evolução, ao longo da viagem, do tempo próprio de Alice em função do tempo próprio de Bob (considerando diversos valores da aceleração própria de Alice).



A figura seguinte mostra a variação da relação entre a duração da viagem do ponto de vista de Alice, T' , e a duração da viagem do ponto de vista de Bob, T , com o parâmetro ζ .



Bibliografia

➤ Bibliografia de nível introdutório

- [1] Domenico Giulini, *Special Relativity – A First Encounter 100 Years Since Einstein*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
 - [2] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler, *Spacetime Physics – Introduction to Special Relativity, Second Edition*. New York: W. H. Freeman and Company, 1992.
 - [3] Andrew M. Steane, *The Wonderful World of Relativity – A Precise Guide for the General Reader*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
 - [4] Hermann Bondi, *Relativity and Common Sense – A New Approach to Einstein*. New York: Dover, 1980 (unabridged and corrected republication of the work originally published in 1964 by Doubleday & Company, Inc., New York).
 - [5] N. David Mermin, *It's About Time – Understanding Einstein's Relativity*. Princeton: Princeton University Press, 2005.
 - [6] Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
 - [7] Ralph Baierlein, *Newton to Einstein – The Trail of Light: An Excursion to the Wave-Particle Duality and the Special Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
 - [8] George F. R. Ellis and Ruth M. Williams, *Flat and Curved Space-Times, Second Edition*. Oxford: Oxford University Press, 2000.
 - [9] João Manuel Resina Rodrigues, *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita*. Lisboa: IST Press, 1998.
-

➤ Bibliografia de nível intermédio

- [10] Anthony Philip French, *Special Relativity (The M.I.T. Introductory Physics Course)*. New York: W. W. Norton & Company, 1968.
- [11] Wolfgang Rindler, *Introduction to Special Relativity, Second Edition*. Oxford: Oxford University Press, 1991.
- [12] Richard P. Feynman, *Six Not-So-Easy Pieces – Einstein's Relativity, Symmetry and Space-Time*. London: Penguin Books, 1997.

- [13] Norbert Dragon, *The Geometry of Special Relativity – A Concise Course*. Heidelberg: Springer, 2012.
 - [14] E. G. Peter Rowe, *Geometrical Physics in Minkowski Spacetime*. London: Springer-Verlag, 2001.
 - [15] N. M. J. Woodhouse, *Special Relativity*. London: Springer, 2003.
 - [16] Andrew M. Steane, *Relativity Made Relatively Easy*. Oxford: Oxford University Press, 2012.
 - [17] Moses Fayngold, *Special Relativity and How it Works*. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
-

➤ Bibliografia de nível avançado

- [18] Gregory L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*. Mineola, NY: Dover, 2003 (unabridged republication of the edition published by Springer-Verlag, New York, Inc., 1992).
- [19] Éricourgoulhon, *Special Relativity in General Frames: From Particles to Astrophysics*. Berlin: Springer-Verlag, 2013.
- [20] Roman U. Sexl and Helmuth K. Urbantke, *Relativity, Groups, Particles: Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics*. Wien: Springer-Verlag, 1992.
- [21] J. Ehlers and C. Lämmerzhald, Eds., *Special Relativity – Will it Survive the Next 101 Years?* Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [22] John W. Schutz, *Independent Axioms for Minkowski Space-Time*. Edinburgh Gate, Harlow: Addison-Wesley Longman Limited, 1997.
- [23] H. A. Lorentz, A. Einstein, e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade, 4ª Edição (Textos Fundamentais da Física Moderna)*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989.